

*УЧЕТ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩЕГО  
КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В  
РАССЕЯНИИ В ФОРМАЛИЗМЕ  
РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОСЦИЛЛЯТОРНОМУ  
БАЗИСУ*

---

В. А. Куликов

А. М. Широков, У. М. Яников

*НИИЯФ МГУ  
2024*

выполнено при поддержке  
гранта РФФ 24-22-00276

# План доклада

1. Формализм HORSE
2. HORSE и кулоновское взаимодействие
3. Расчеты коэффициентов разложения волновой функции
4. Результаты расчетов фазы рассеяния

# Формализм HORSE

Радиальное уравнение Шредингера  $H^l u_l(k, r) = E u_l(k, r)$

разложение в ряд в. ф.  $u_l(k, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl}(k) \varphi_{nl}(r)$

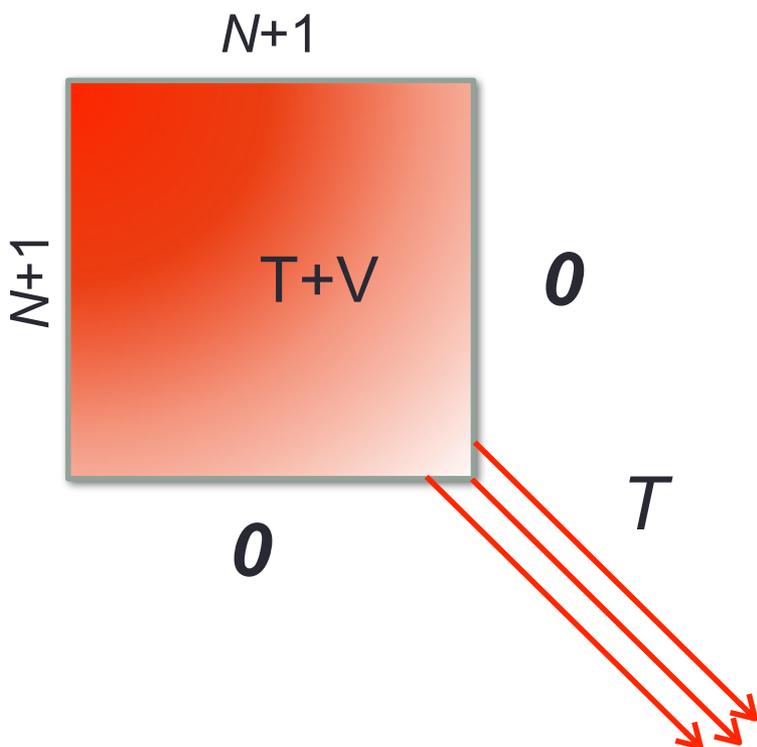
$\varphi_{nl}(r)$  – осцилляторная функция

$$\sum_{n'=0}^{\infty} (H_{nn'}^l - \delta_{nn'} E) a_{n'l}(k) = 0 \quad n=0,1,\dots$$

$$H_{nn'}^l = \langle \varphi_n(r) | H^l | \varphi_{n'}(r) \rangle$$

# Формализм HORSE

*Структура  
гамильтониана:*



Матричные элементы  
гамильтониана:

$$H_{nn'}^l = T_{nn'}^l + V_{nn'}^l$$

*Ненулевые матричные  
элементы кин. энергии*

$$T_{nn} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( 2n + l + \frac{3}{2} \right)$$

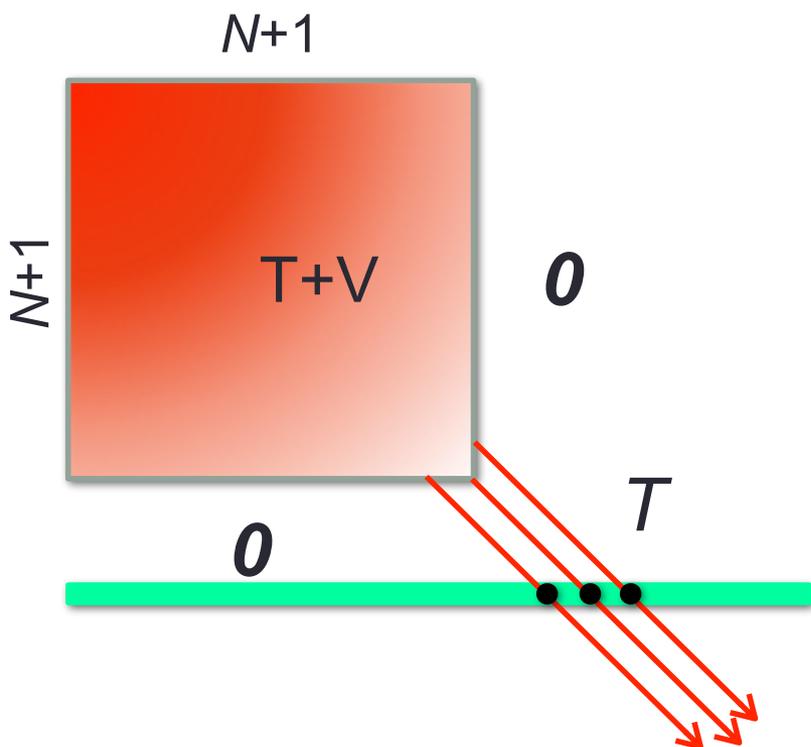
$$T_{n+1,n} = T_{n,n+1} = -\frac{\hbar\omega}{2} \sqrt{(n+1) \left( n + l + \frac{3}{2} \right)}$$

*Обрезанная матрица  
потенциала*

$$V_{nn'}^l = \begin{cases} V_{nn'}^l & \text{if } n \leq N \text{ and } n' \leq N \\ 0 & \text{if } n > N \text{ or } n' > N \end{cases}$$

# Формализм HORSE

*Структура  
гамильтониана:*



Матричные элементы  
гамильтониана:

$$H_{nn'}^l = T_{nn'}^l + V_{nn'}^l$$

Матричные элементы  
потенциала падают с  
ростом  $nn'$

Матричные элементы кин.  
энергии растут с  $nn'$

$N, \hbar\omega$  — параметры базиса

$$\sum_{n'}^{\infty} (H_{nn'}^l - \delta_{nn'} E) a_{n'l}(k) = 0$$

# Формализм HORSE

При  $n, n' > N$   $\sum_{n'}^{\infty} (H_{nn'}^l - \delta_{nn'} E) a_{n'l}(k) = 0$  переходит в

$$T_{n,n-1} a_{n-1}^{as}(k) + (T_{n,n} - E) a_n^{as}(k) + T_{n,n+1} a_{n+1}^{as}(k) = 0$$

$$a_n^{as}(k) = \cos \delta_l S_n(k) + \sin \delta_l C_n(k)$$

При  $n, n' \leq N$ :  $E_\lambda$  – собственные значения,  $\gamma_{\lambda n}$  – собственные векторы

$$\mathfrak{G}_{nn'} = - \sum_{\lambda=0}^N \frac{\gamma_{\lambda n}^* \gamma_{\lambda n'}}{E_\lambda - E} \quad \tan \delta_l = - \frac{S_N(k) - \mathfrak{G}_{NN} S_{N+1}(k)}{C_N(k) - \mathfrak{G}_{NN} C_{N+1}(k)}$$

# Формализм HORSE

## Кулоновский случай

$$V = V^{Nucl} + V^{Coul}$$

$$V^{Coul}(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

$$u_l(k, r) \sim \cos \delta_l(k) F_l(\eta, kr) + \sin \delta_l(k) G_l(\eta, kr), \quad r \rightarrow \infty$$

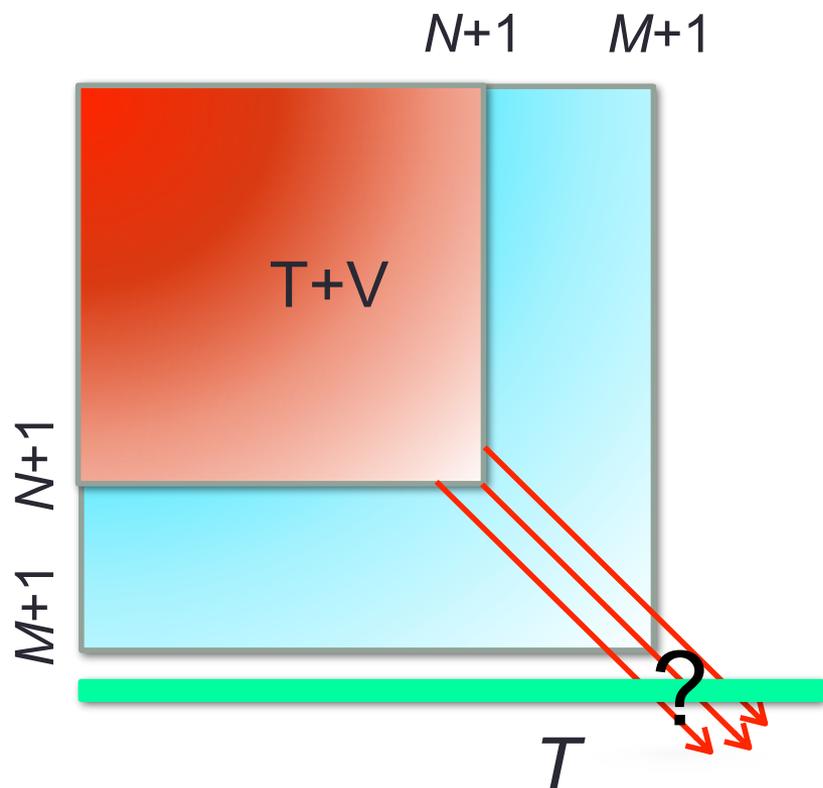
$F_l(\eta, kr)$  — регулярная кулоновская функция

$G_l(\eta, kr)$  — нерегулярная кулоновская функция

$$\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2 k} \quad \text{— параметр Зоммерфельда}$$

# Формализм HORSE

## Кулоновский случай



Матричные элементы гамильтониана:

$$H_{nn'}^l = T_{nn'}^l + V_{nn'}^l$$

$$V_{nn'}^l = V_{nn'}^{Nucl} + V_{nn'}^{Coul}$$

Матричные элементы кулоновского потенциала медленнее падают с ростом  $nn'$

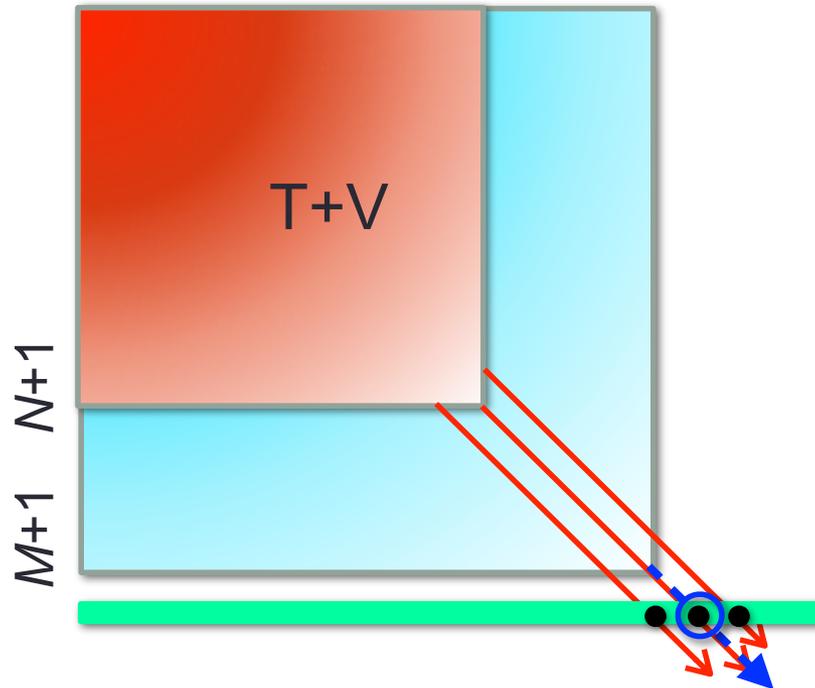
Матричные элементы кин. энергии растут с  $nn'$

# Формализм HORSE

## Кулоновский случай

$$T_{n,n-1}a_{n-1}^{as}(k) + (T_{n,n} - E)a_n^{as}(k) + T_{n,n+1}a_{n+1}^{as}(k) + \frac{2\eta kr_0}{\sqrt{4n + 2l + 3}}a_n^{as}(k) = 0$$

I. P. Okhrimenko, Nucl. Phys. A 424,121 (1984).



# Формализм HORSE

## Кулоновский случай

$$u_l(k, r) \sim \cos \delta_l(k) F_l(\eta, kr) + \sin \delta_l(k) G_l(\eta, kr), \quad r \rightarrow \infty$$

$$u_l(k, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl}(k) \varphi_{nl}(r)$$

$$a_{nl}^{as}(k) = \cos \delta_l(k) S_n(k) + \sin \delta_l(k) C_n(k)$$

$$F_l(\eta, kr) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(k) \varphi_n^l(r)$$

$$\widetilde{G}_l(\eta, kr) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(k) \varphi_n^l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} G_l(\eta, kr)$$

# Формализм HORSE

## Кулоновский случай

В окрестности точки поворота  $r_{turn} = r_0\sqrt{4n + 2l + 3}$ :

$$\varphi_n^l(r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2r_0}{\nu}} \delta(r - \nu r_0)$$

$$\nu = \hbar k / \mu$$

$$S_n(k) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int F_l(\eta, kr) \varphi_n^l(r) dr \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\frac{2r_0}{\nu}} F_l(\eta, \nu kr_0)$$

$$C_n(k) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int G_l(\eta, kr) \varphi_n^l(r) dr \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\frac{2r_0}{\nu}} G_l(\eta, \nu kr_0)$$

# Формализм HORSE

## Кулоновский случай

Определитель Казорати:

$$\mathcal{K}_n(C, S) = C_{n+1}(k)S_n(k) - S_{n+1}(k)C_n(k)$$

Следующая комбинация не зависит от  $n$ , можно посчитать на асимптотике и спуститься вниз по ТРС:

$$T_{n,n+1} \mathcal{K}_n(C, S) = \frac{\hbar}{2}$$

# Формализм HORSE

## Кулоновский случай

Способы вычисления  $S_n(k)$ :

- Численное интегрирование при данном  $n$

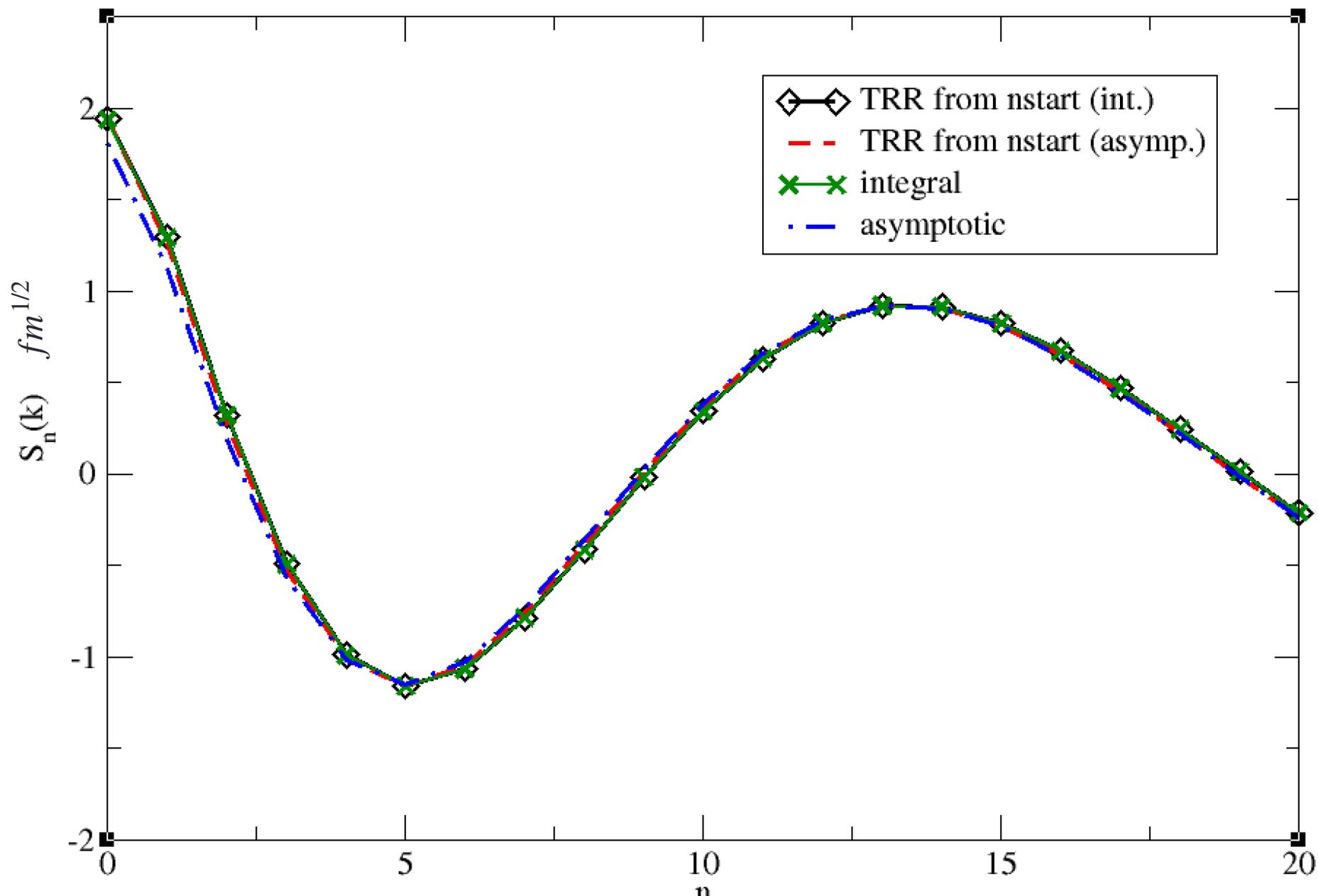
$$\frac{1}{\sqrt{\nu}} \int F_l(\eta, kr) \varphi_n^l(r) dr$$

- Асимптотическое выражение  $\frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\frac{2r_0}{\nu}} F_l(\eta, \nu kr_0)$

- Расчет при больших  $n$  и спуск вниз по ТРС

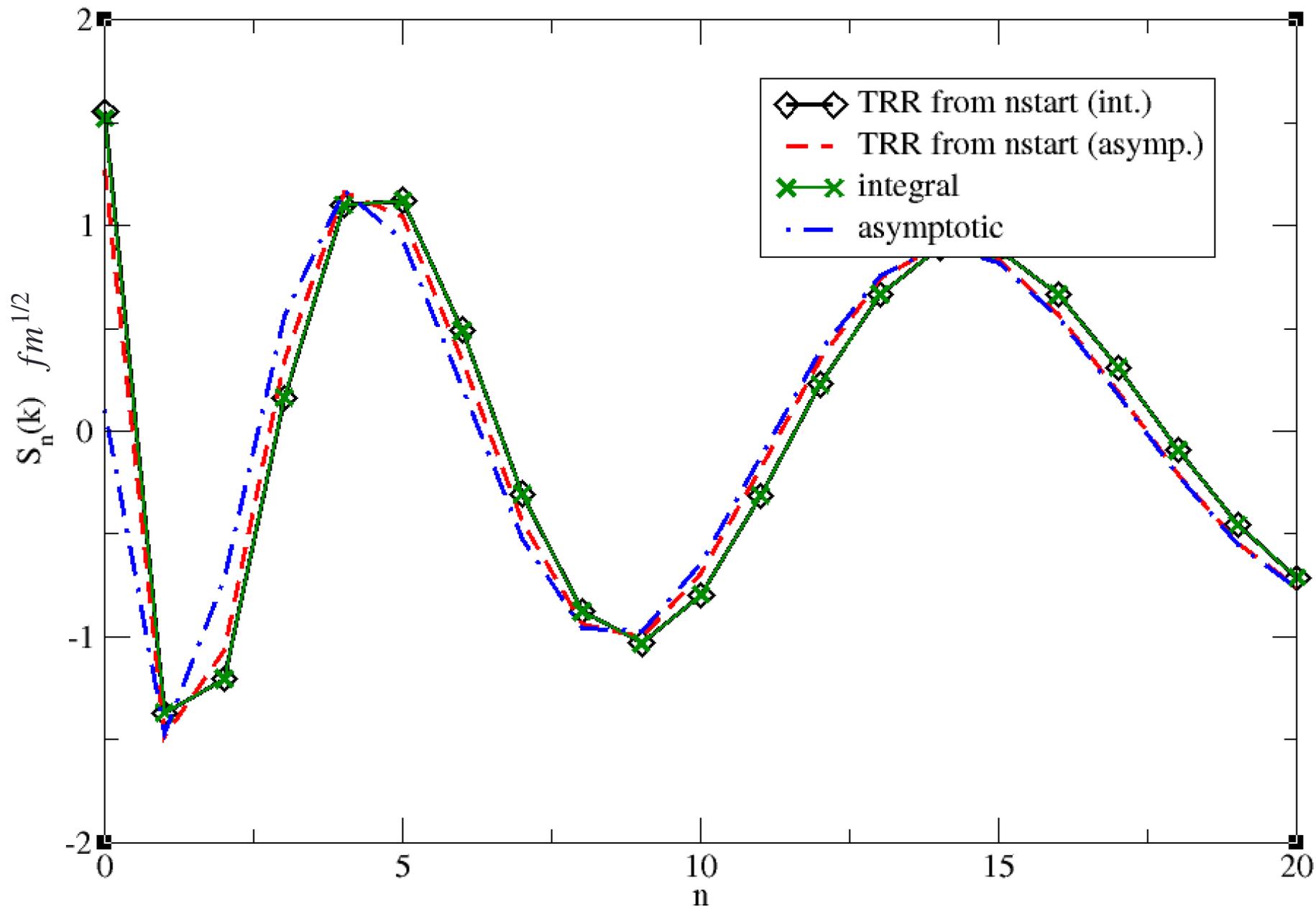
$$Z_1 * Z_2 = 2, A_1 = 1, A_2 = 4$$

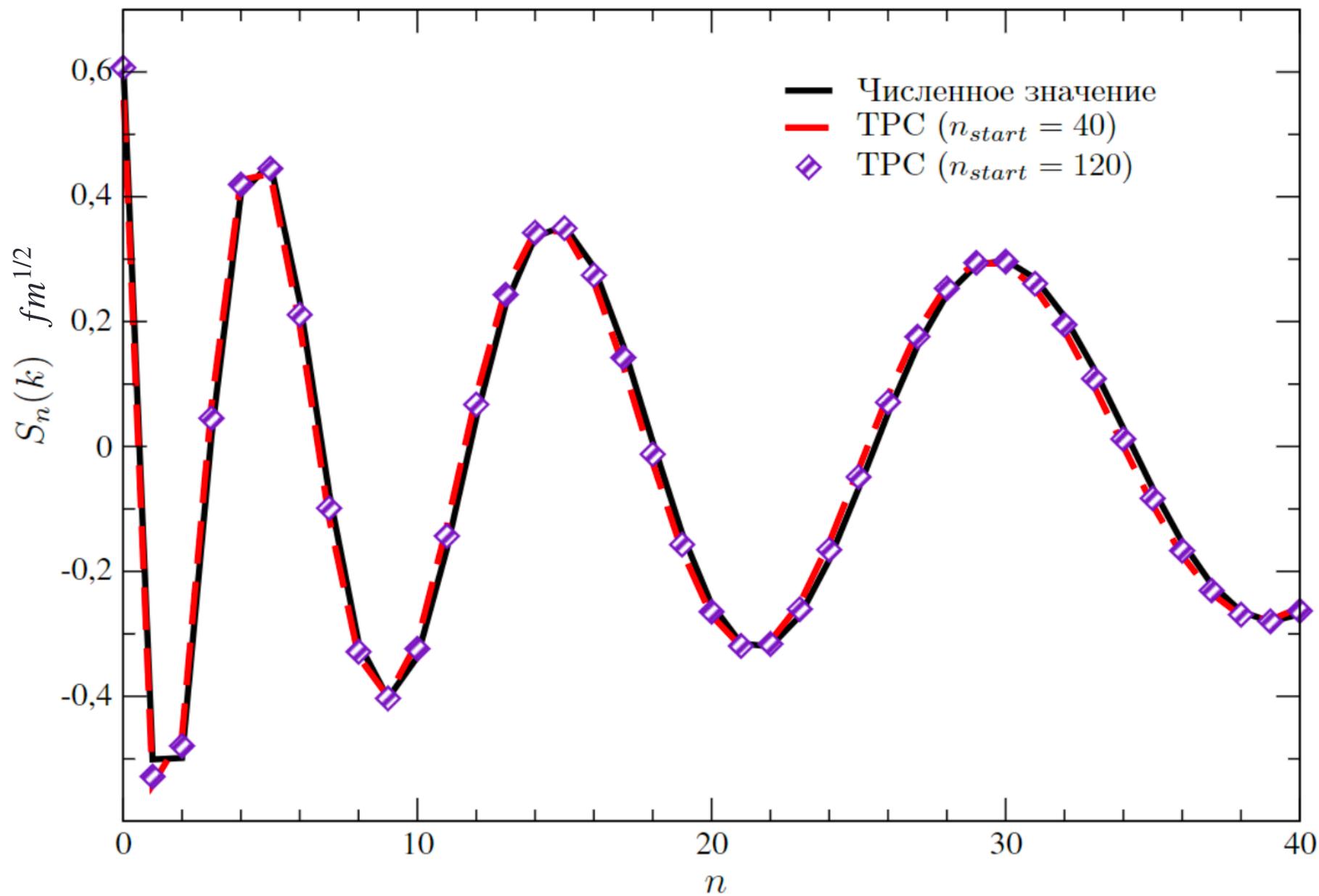
$\hbar\omega = 20$  MeV,  $E = 15$  MeV,  $l = 1$ ,  $n_{\text{start}} = 20$



$$Z1*Z2=2, A1=1, A2=4$$

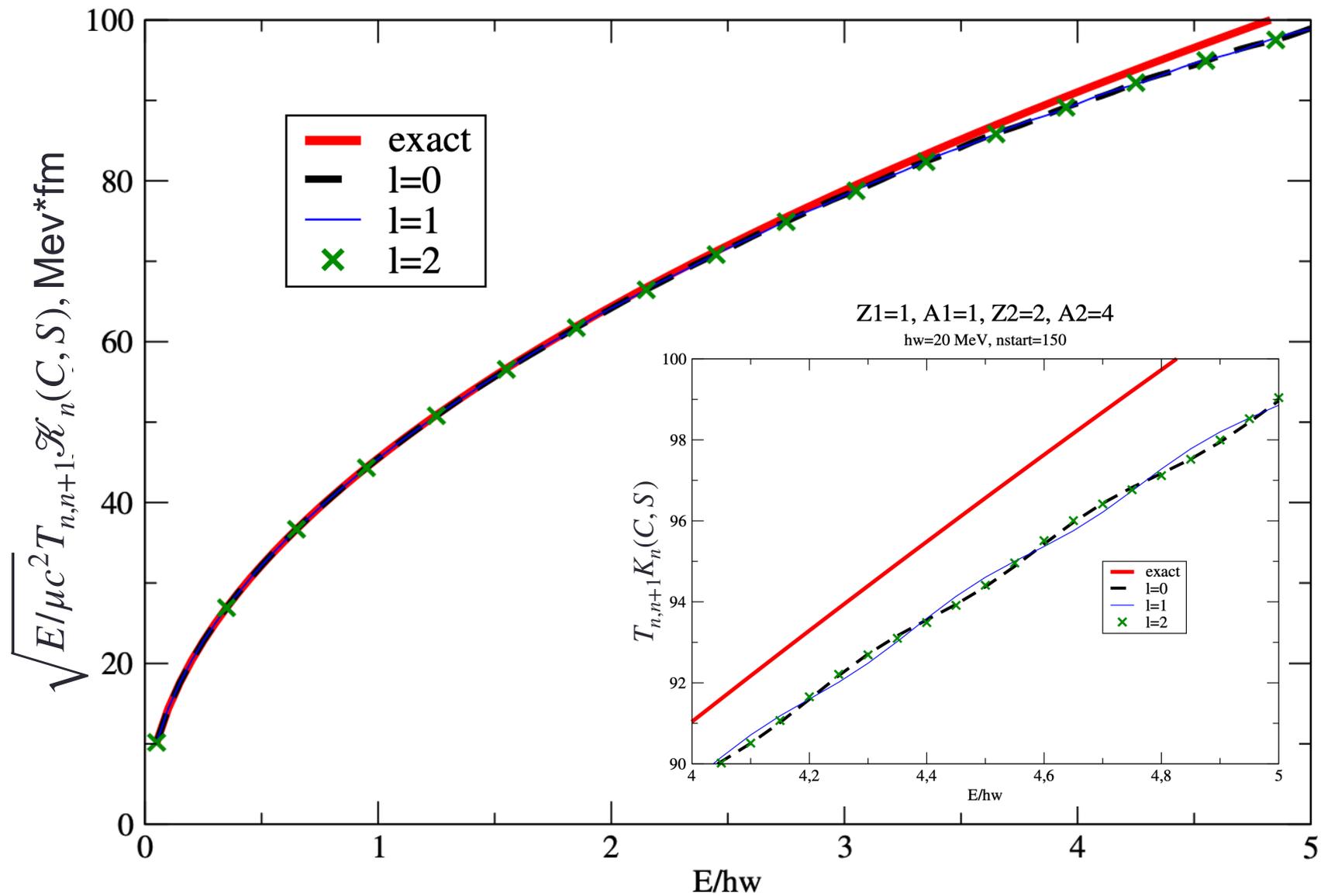
hw=20 MeV, E=40 MeV, l=1, nstart=20





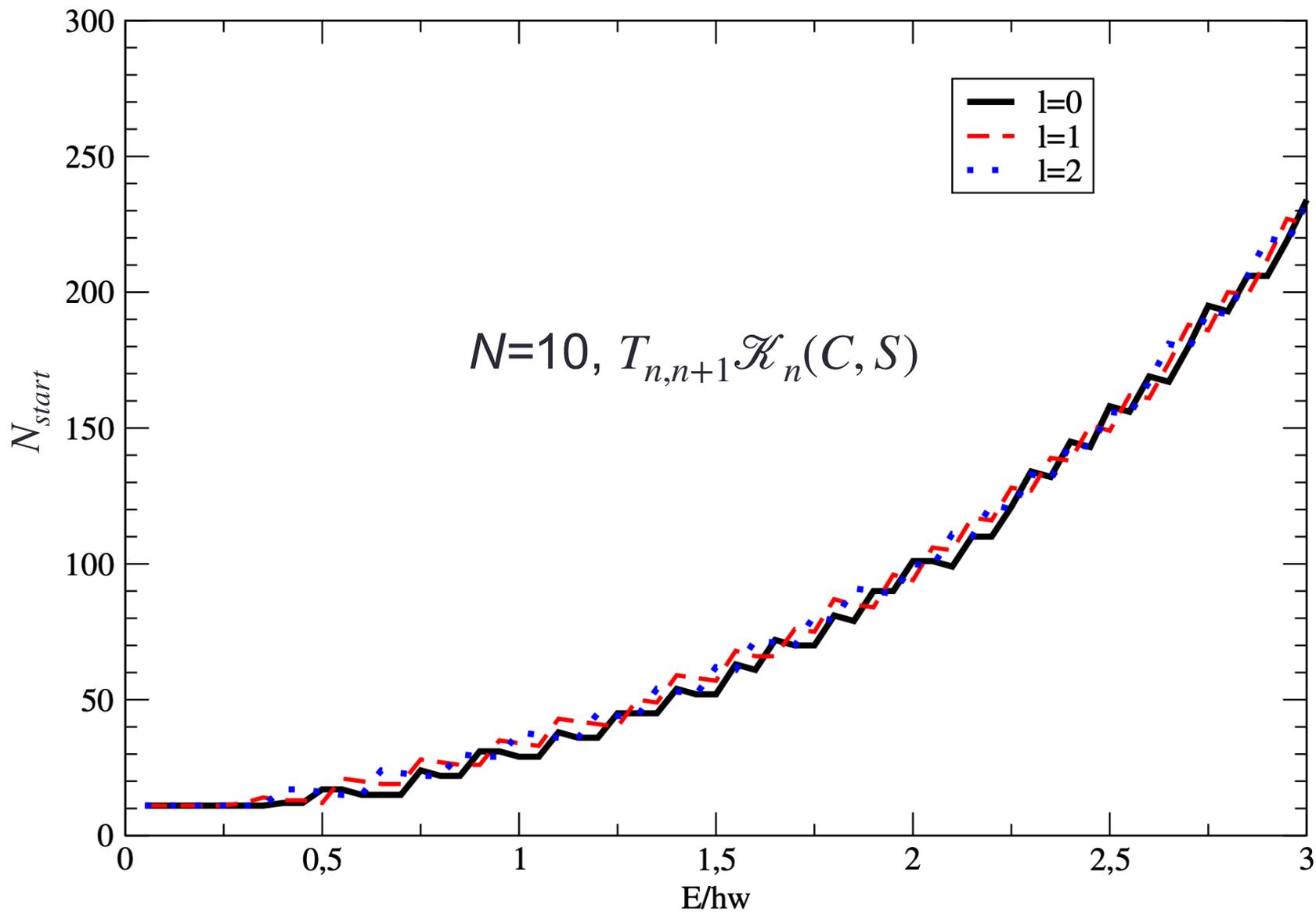
Z1=1, A1=1, Z2=2, A2=4

$\hbar\omega=20$  MeV, nstart=150



$Z1=1, A1=1, Z2=2, A2=4$

$\hbar\omega=20$  MeV, error=0.5%



# Формализм HORSE

## Кулоновский случай

$$\tan \delta_l = - \frac{S_N(k) - \mathfrak{G}_{NN} S_{N+1}(k)}{C_N(k) - \mathfrak{G}_{NN} C_{N+1}(k)}$$

# Модельные расчеты

- Протестируем с потенциалом Вудса-Саксона:

$$V^{WS}(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{\alpha_0}\right)} + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{V_{ls}}{1 + \exp\left(\frac{r - R_1}{\alpha_1}\right)}$$

- С добавлением кулоновского взаимодействия:

$$V^{Coul}(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

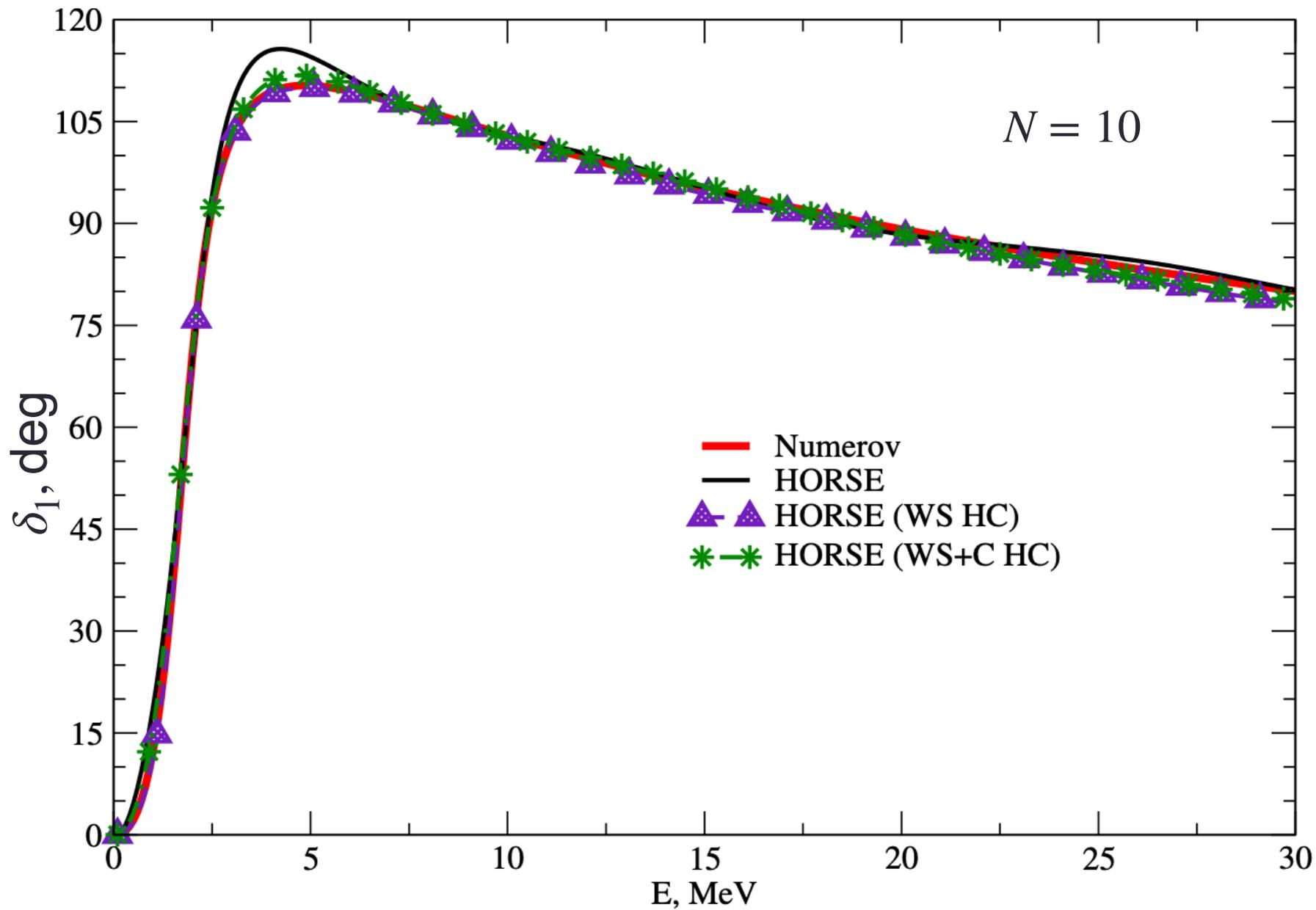
# Сглаживание матричных элементов потенциальной энергии

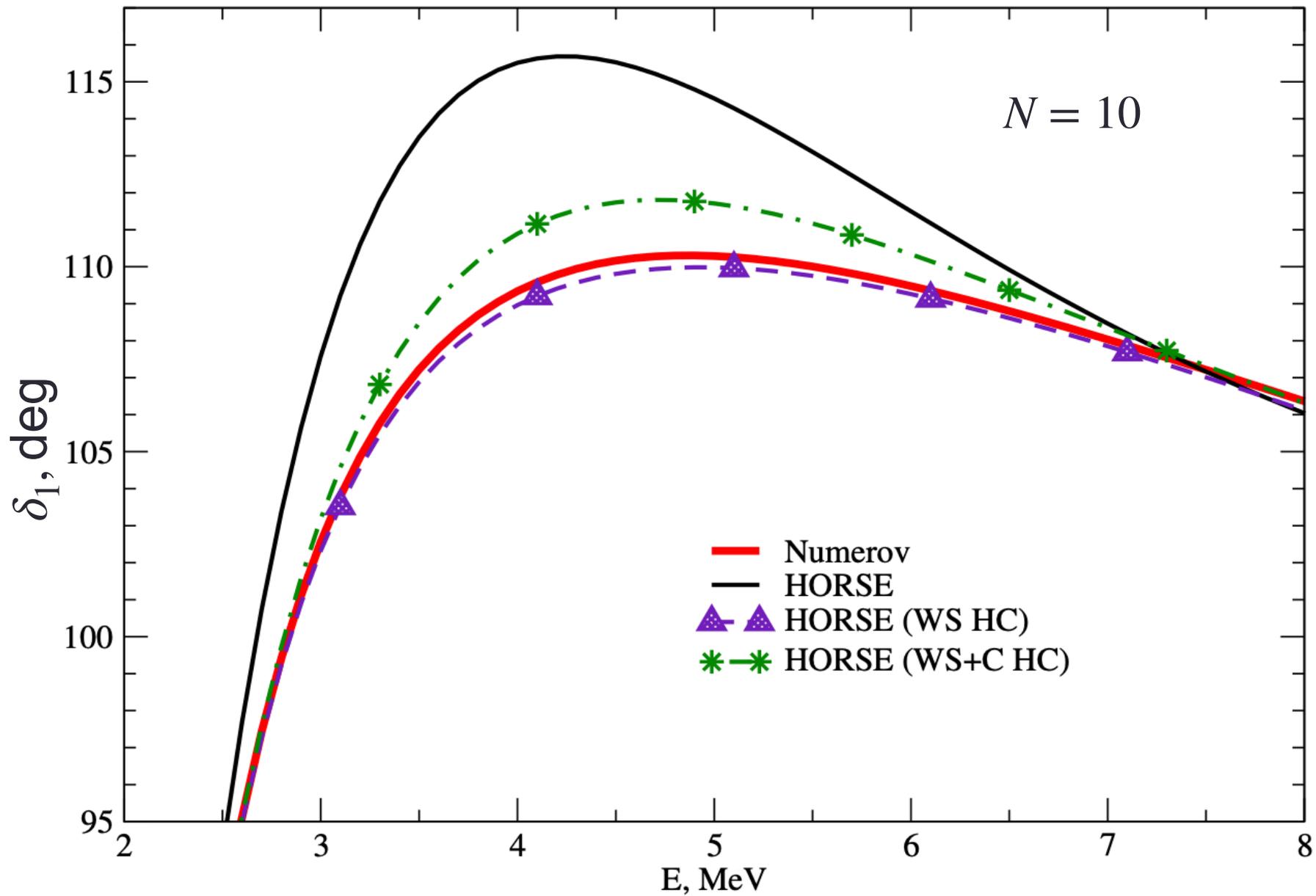
$$\tilde{V}_{nm}^N = \sigma_n^N V_{nm}^N \sigma_m^N$$

$$\sigma_n^N = \frac{1 - \exp\{-[\alpha(n - N - 1) / (N + 1)]^2\}}{1 - \exp\{-\alpha^2\}}$$

$$\alpha = 5$$

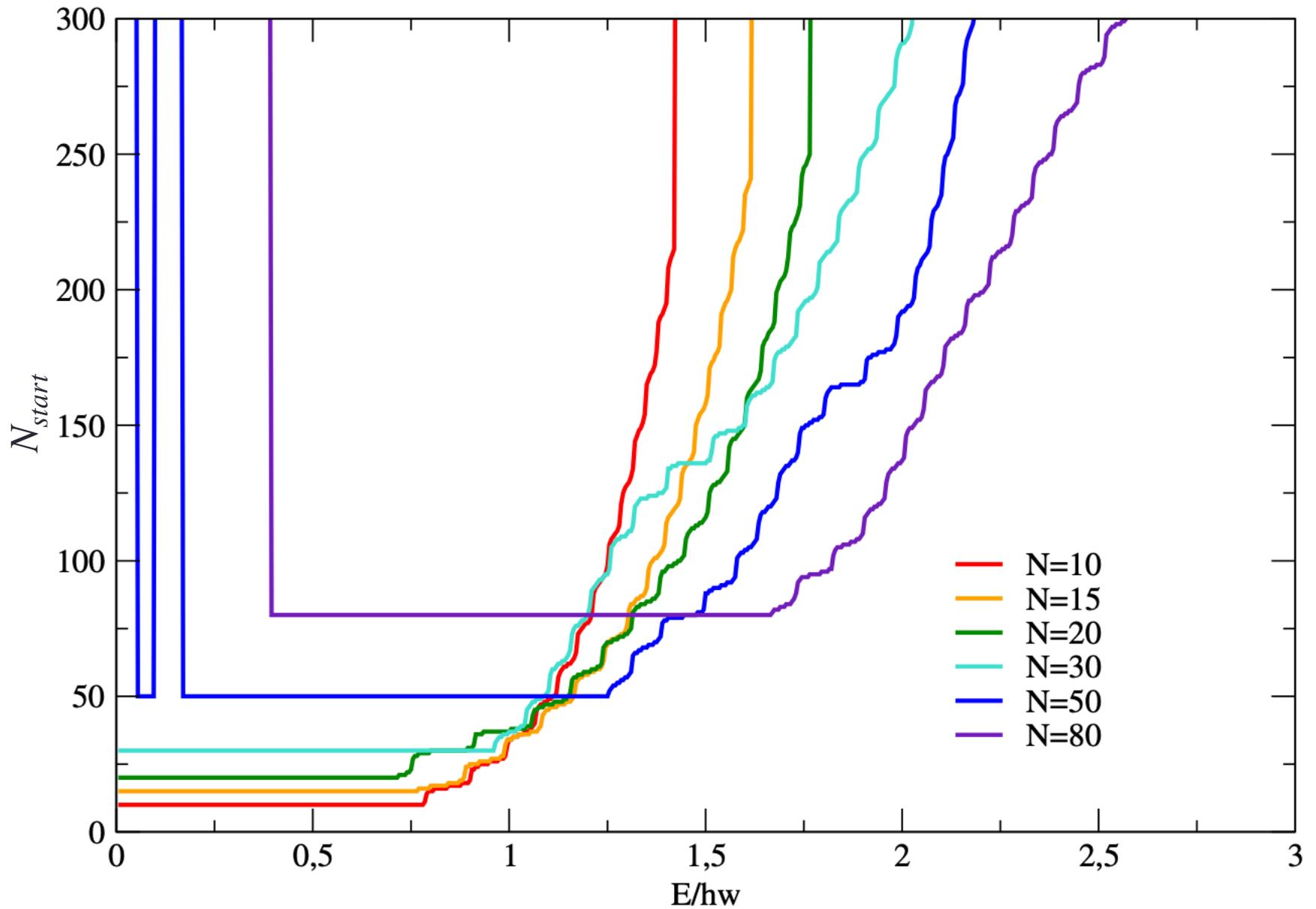
J. Révai, M. Sotona, and J. Žofka, J. Phys. G 11, 745 (1985).





$Z1*Z2=2, A1=1, A2=4$

$hw=20 \text{ MeV}, l=0, j=1/2$



# Выводы

- Мы модифицировали метод И. П. Охрименко
- Проверили предлагаемое ТРС, сравнив полученные из него коэффициенты разложения с точным значением, оказывается, асимптотическая формула работает в более широком диапазоне  $n$
- Рассчитаны фазы рассеяния в модельной задаче рассеяния заряженной частицы; выяснили, что кулоновский потенциал не надо сглаживать, в отличие от ядерного
- Фазы хорошо воспроизводят численные расчеты методом Нумерова

Спасибо за внимание!