ТИХООКЕАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Параметризация S-матрицы истинного трёхтельного рассеяния и её применение в расчётах спектров атомных ядер с использованием осцилляторного базиса

Авторы: Ефименко М.К.[1], Мазур А.И. [1], Мазур И.А[2].
Докладчик: Ефименко М.К.

1. Тихоокеанский государственный университет.
2. Центр исследований экзотических ядер, Институт фундаментальных наук (Республика Корея).

Цели и задачи

Цель:

- Тестирование параметризации трёхчастичной S-матрицы на модельной задаче истинно демократического рассеяния системы из трёх частиц .

Задачи

- Рассчитать фазы трёхтельного рассеяния модельной задачи методом Нумерова и определить энергию и ширину соответствующего резонанса. Считать их точными.
- Рассчитать фазы рассеяния для модельного потенциала методом SS HORSE в разных модельных пространствах.
- Параметризовать фазы рассеяния и S-матрицу.
- Определить положение полюсов S-матрицы на комплексной плоскости импульсов => рассчитать энергию и ширину резонанса в разных модельных пространствах.
- **Исследовать сходимость энергий и ширин резонанса к точным.**

Гиперсферическое представление

- Координаты Якоби для системы трёх частиц:

$$\vec{x}_i = \sqrt{\frac{m_j m_k}{\mu(m_j+m_k)}}\left(\vec{r}_j - \vec{r}_k\right)$$

$$\vec{y}_i = \frac{\sqrt{m_i\left(m_j + m_k\right)}}{\mu}\left(\vec{r}_i + \frac{m_j\vec{r}_j + m_k\vec{r}_k}{m_j + m_k}\right)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3)$$

$\mu = m_1 + m_2 + m_3$ — полная масса системы,
$\vec{R}$ – координата центра масс,
индексы i, j, k = 1, 2, 3.

- Гиперуглы и гиперрадиус:

$$\rho^2 = x_i^2 + y_i^2, \qquad x_i = \rho\cos\alpha_i, \qquad y_i = \rho\sin\alpha_i \qquad (1)$$

SS HORSE (Single State Harmonic Oscillator Representation of Scattering Equation)

Гиперсферическое представление и метод SS HORSE

- Собственные функции 6ти-мерного гармонического осциллятора:

$$\varphi_n^{\mathcal{L}} = (-1)^n \sqrt{\frac{2\lambda n!}{\Gamma\left(n+\mathcal{L}+\frac{3}{2}\right)}} (\lambda\rho)^{\mathcal{L}+1} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\lambda^2\rho^2}{2}\right) L_n^{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\lambda^2\rho^2) \quad (2)$$

$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}$ — обезразмеривающий множитель,

$\mathcal{L} = \mathrm{K} + \frac{3}{2}$ — эффективный угловой момент,

K – гипермомент,
$\hbar\omega$ — осцилляторный параметр,
L_n^l – полином Лагера, $\Gamma(x)$ – гамма-функция,
n – главное квантовое число.

$$\mathrm{H}_{nn'} = \int_0^\infty \varphi_n^{\mathcal{L}} \widehat{H} \varphi_{n'}^{\mathcal{L}} dE$$

$$\widehat{H} = \widehat{T} + \widehat{V}$$

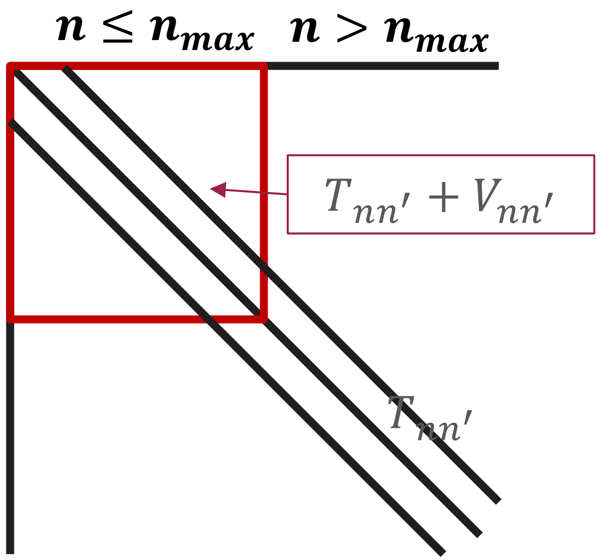

Рисунок 1: Схематичная иллюстрация вида матрицы гамильтониана.

- n_{max} и $\hbar\omega$ — параметры метода SS HORSE

Фазы рассеяния в методе SS HORSE:

Метод SS HORSE

Single State

$$\operatorname{tg}\delta_{\mathcal{L}}(E_\lambda) = -\frac{\mathcal{S}_{n_{\max}+1,\mathcal{L}}(E_\lambda)}{\mathcal{C}_{n_{\max}+1,\mathcal{L}}(E_\lambda)} \qquad (3)$$

$$S(E_\lambda) = \frac{C^{(-)}_{n_{\max}+1,\mathcal{L}}(E_\lambda)}{C^{(+)}_{n_{\max}+1,\mathcal{L}}(E_\lambda)} \qquad (4)$$

$q = \sqrt{2E/\hbar\omega}$ – обезразмеренный импульс,
E_λ — собственные значения матрицы гамильтониана в осцилляторном представлении полученные в Модели оболочек без инертного кора,
$n_{\max}$ — параметр, соответствующий размеру матрицы гамильтониана.

$$\mathcal{S}_{n\mathcal{L}}(E) = \sqrt{\frac{2n!}{\lambda\Gamma\left(n+\mathcal{L}+\frac{3}{2}\right)}}\, q^{\mathcal{L}+1}\; exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) L_n^{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(q^2) \qquad (5)$$

$$\mathcal{C}_{n\mathcal{L}}(E) = -\frac{2q}{\pi\mathcal{S}_0^{\mathcal{L}}}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\mathcal{S}_0^{\mathcal{L}}(q')\mathcal{S}_n^{\mathcal{L}}(q)}{q^2-q'^2}dq' \qquad (6)$$

$$C^{(\pm)}_{n,\mathcal{L}}(E) = \mathcal{S}_{n,\mathcal{L}}(E) \pm \mathcal{C}_{n\mathcal{L}}(E) \qquad (7)$$

$\mathcal{P}$ – интеграл в смысле главного значения.

Симметрия S-матрицы

Случай двух частиц

$$S(-k) = \frac{1}{S(k)}$$

$$S(k^*) = \frac{1}{S^*(k)}$$

$$S(-k) = S^*(k)$$

Случай трёх частиц (полуцелый орбитальный момент)

$$S(k^*) = \frac{1}{S^*(k)}$$

$$S\left(ke^{i\pi}\right) = -S^{-1}(k) + 2$$

- Полюсы S-матрицы в нижней полуплоскости импульса соответствуют резонансным состояниям!

$$\mathrm{E}_p = E_{\text{рез}} - i\,\Gamma/2 \qquad (8)$$

Параметризация S-матрицы

$$S = \frac{\mathcal{K}(k) + ik^{2l+1}}{\mathcal{K}(k) - ik^{2l+1}} \quad (9)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{k^{2l+1}}{\mathcal{K}(k)} \quad (10)$$

$$S = \frac{X(E) + 2k^{2K+4}\ln k + i\pi k^{2K+4}}{X(E) + 2k^{2K+4}\ln k - i\pi k^{2K+4}} \quad (11)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\pi k^{2K+4}}{X(E) + 2k^{2K+4}\ln k} \quad (12)$$

$\mathcal{K}(k)$ — функция эффективного радиуса,
$X(k)$ — аналог функции эффективного радиуса для рассеяния трёх тел.

- Сдвиг фаз рассеяния можно найти методом SS HORSE.
- Известные сдвиги фаз SS HORSE → параметризация $X(E)$.
- Известная $X(E)$ → S-матрица.
- Полюсы S-матрицы → энергия и ширина резонанса.

Модельная задача

$$V = \begin{cases} -\dfrac{V_0}{1 + \exp\left(\dfrac{\rho - r_{\text{пот}}}{\alpha}\right)}, & \rho \le r_{\text{гр}} \\ -A/(B+\rho)^3, & \rho > r_{\text{гр}} \end{cases} \qquad (12)$$

$$A = 27V_0^3\left(1 + \exp\left(\frac{r_{\text{гр}} - r_{\text{пот}}}{\alpha}\right)\right)^2 \Big/ \exp^3\left(\frac{r_{\text{гр}} - r_{\text{пот}}}{\alpha}\right)$$

$$B = 3\alpha\left(1 + \exp\left(\frac{r_{\text{гр}} - r_{\text{пот}}}{\alpha}\right)\right) \Big/ \exp\left(\frac{r_{\text{гр}} - r_{\text{пот}}}{\alpha}\right) - r_{\text{гр}}$$

$V_0 = 10$ МэВ — глубина потенциала, $r_{\text{пот}} = 2.0$ фм — характерный радиус,
$\alpha = 0.05$ фм — параметр диффузности,
$r_{\text{гр}} = 1.1 r_{\text{пот}}$ — точка сшивки.

Масса трёхчастичной системы: 5633.51 МэВ.

Гипермомент: $K = 0$.

Параметры SS HORSE: $\hbar\omega = 2, 3, \ldots, 10, 12, \ldots 50$; $n_{max} = 7, 8, 9, 10$.

Фазы рассеяния

Сравнение фаз, полученных методом SS HORSE и методом Нумерова.

Результаты, полученные методом Нумерова, считаются за эталон.

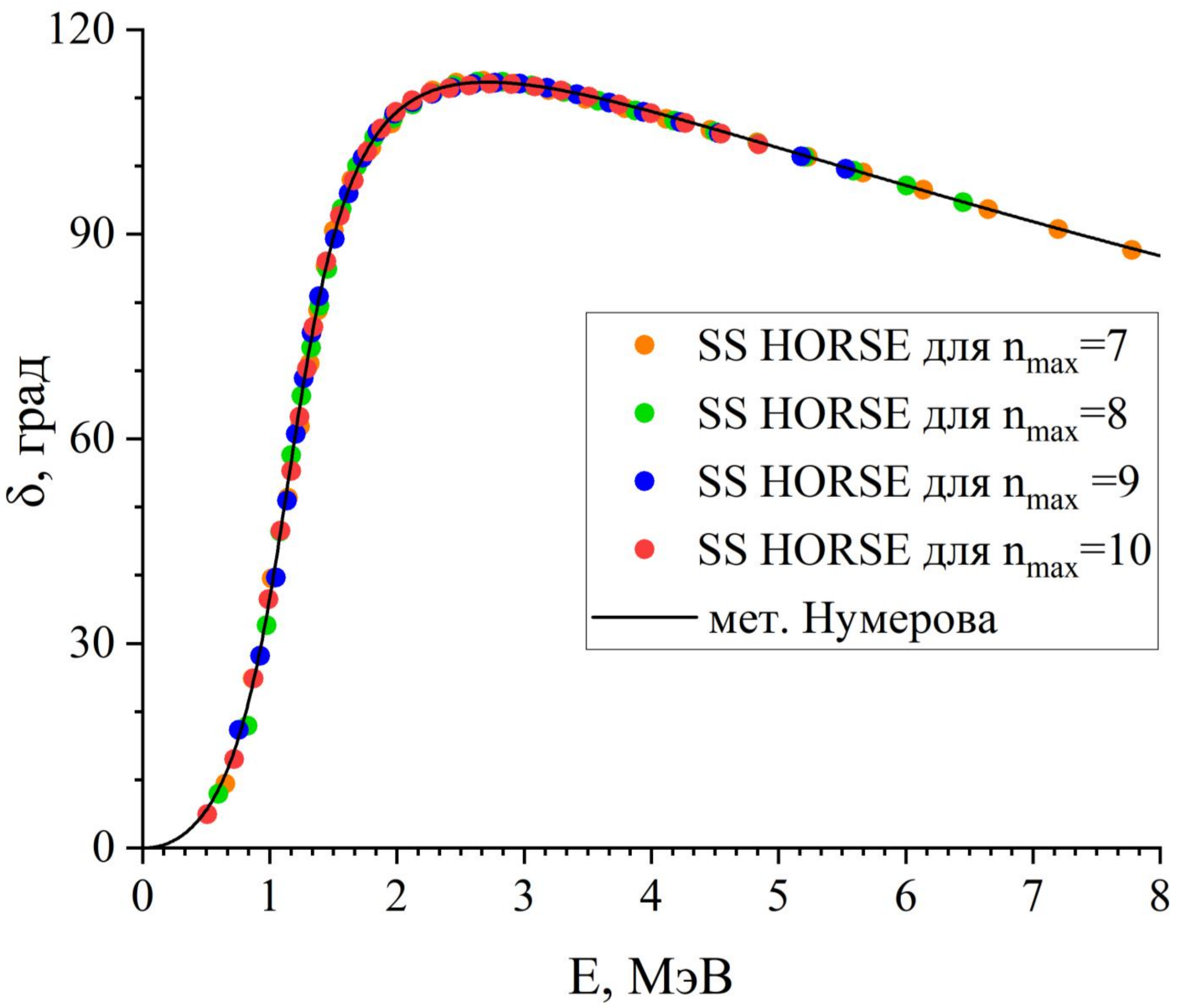

Рисунок 2: Сдвиги фаз рассеяния, полученные методом SS HORSE и методом Нумерова.

Оценка погрешностей

Универсальная функция: $$U(E) = -\frac{S^{\mathcal{L}}_{n_{\max}+1(E)}}{C^{\mathcal{L}}_{n_{\max}+1(E)}}$$

$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\delta(E) - U(E) = 0}$ **только при** $\boldsymbol{E = E_{v'}}$

Погрешность будем определять как:

$$\Delta_E = \sqrt{\frac{1}{n_{\max}} \sum_{\hbar\omega_i} \left(E_{v,\hbar\omega_i} - E_{v',\hbar\omega_i}\right)^2}$$

Аппроксимация. функция X

Сравнение вспомогательной функции X для метода Нумерова, SS HORSE и её аппроксимации.

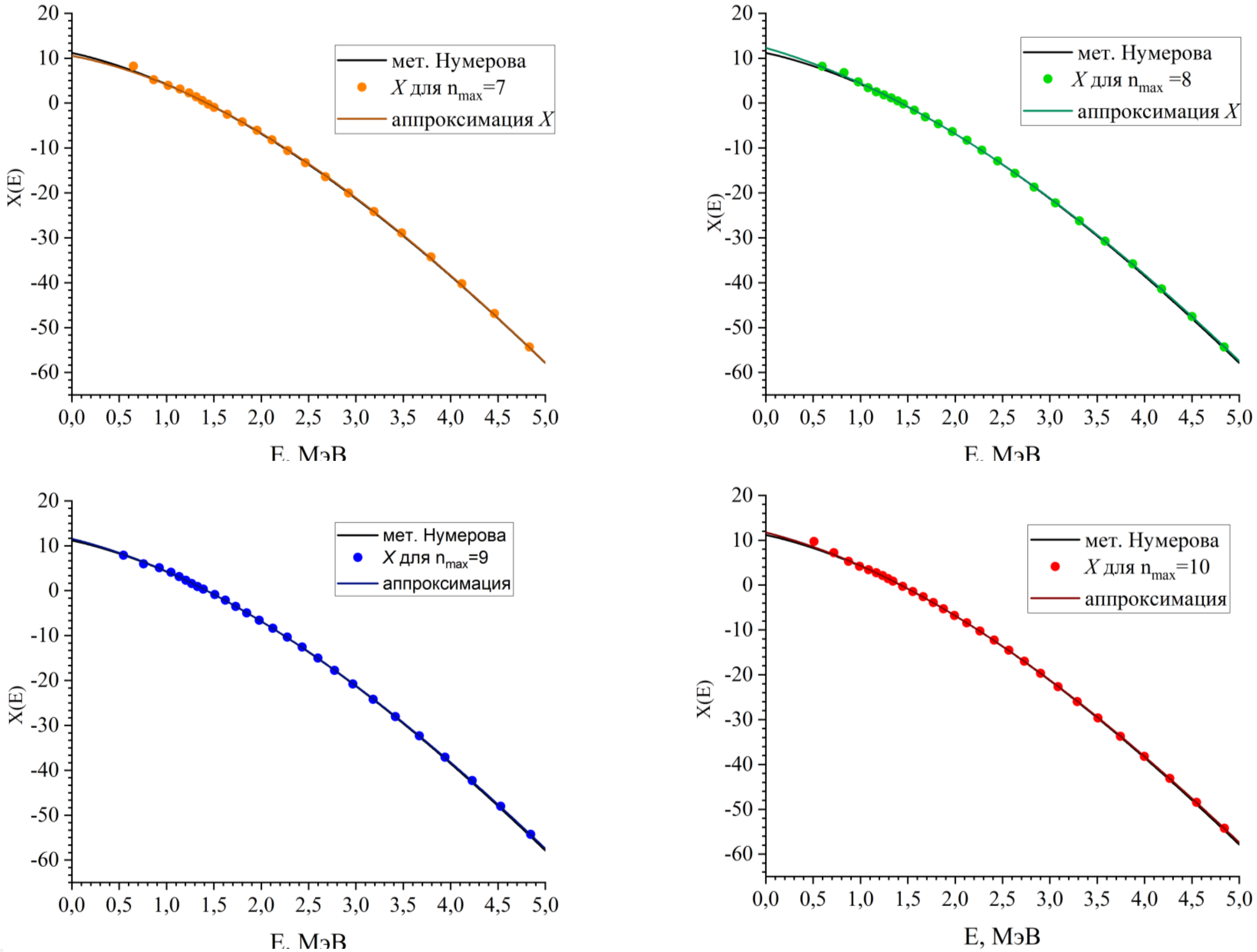

Рисунок 3: Функция X полученная аппроксимацией результатов метода SS HORSE и методом Нумерова.

Аппроксимирующая функция:

$$X(E) = \sum_{0}^{3} \beta_i E^i$$

Фазы рассеяния

Сравнение фаз, полученных методом SS HORSE, методом Нумерова и результатов аппроксимации.

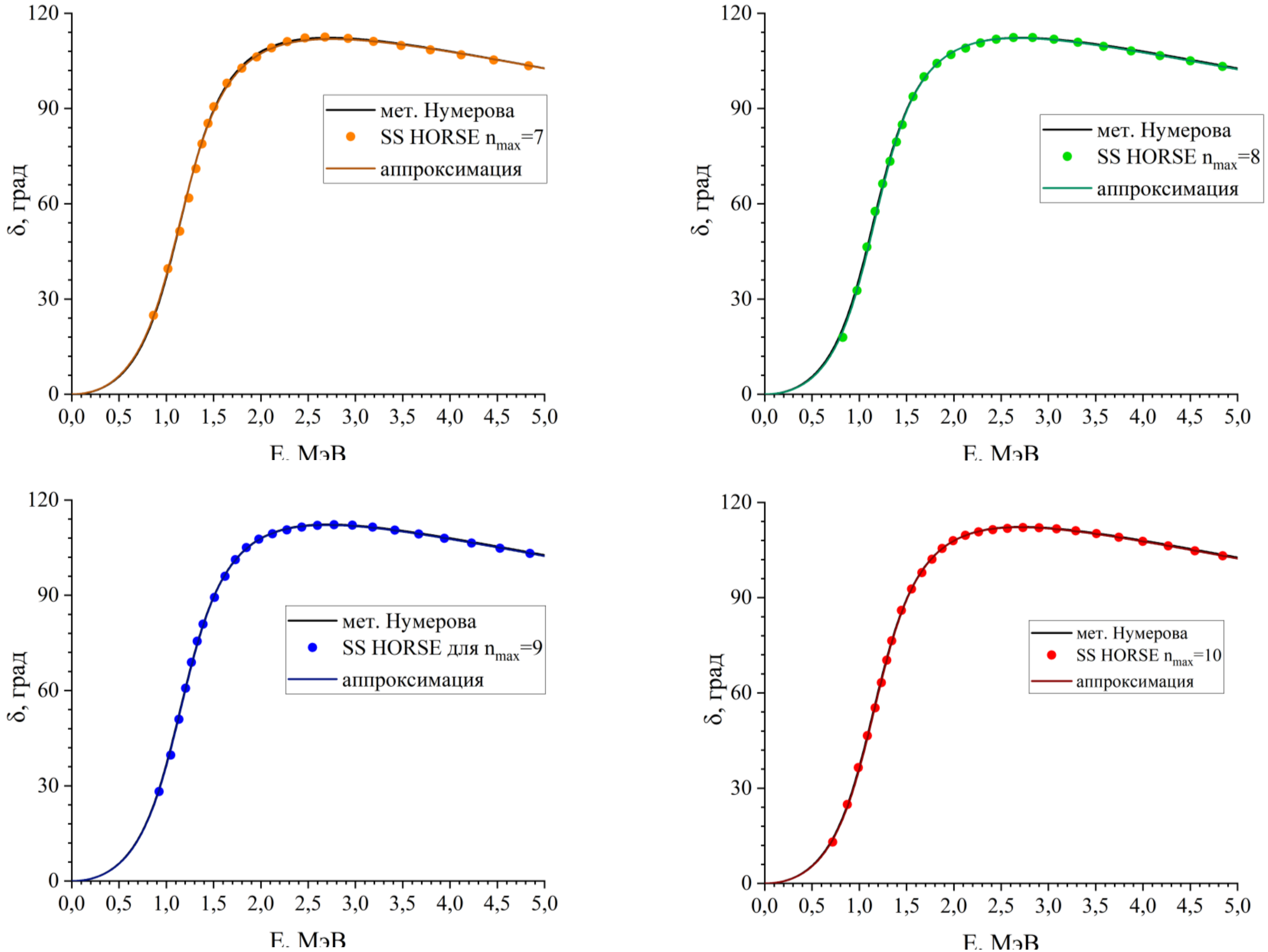

Рисунок 4: Функция X полученная аппроксимацией результатов метода SS HORSE и методом Нумерова.

Результаты

И выводы.

n_{max}	E, МэВ	Г, МэВ	Погрешность аппроксимации, кэВ
7	1,138	0,871	14,8
8	1,159	0,840	8,6
9	1,150	0,850	6,5
10	1,153±0,003*	0,848±0,002*	4,9
Метод Нумерова	1,150	0,850	—

Результаты, полученные при параметризации S-матрицы через функцию X(E), согласуются с результатами, полученными методом Нумерова в пределах погрешности.

Следовательно, параметризацию функции X(E) можно использовать для задач истинно трёхтельного рассеяния.

*погрешность, рассчитанная сравнением с предыдущим модельным пространством n_{max}.