Ширины резонансного рассеяния мюонов на атомных ядрах

Мухаметкалиулы Адил
Объединенный институт ядерных исследований
государственный университет «Дубна»

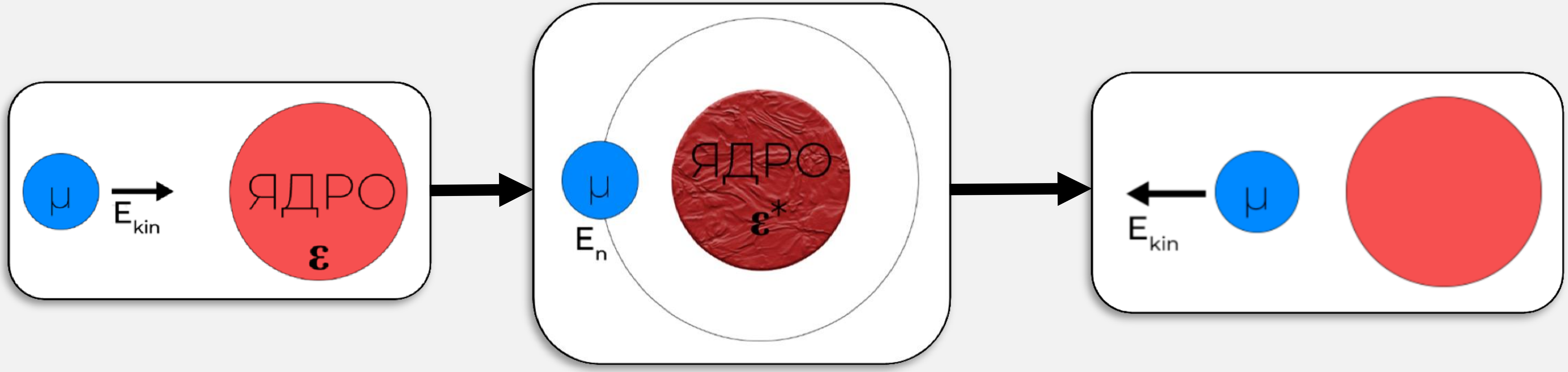
- **Цель работы:** оценка резонансных сечений и ширин при рассеянии мюонов на атомных ядрах, демонстрация возможности резонансных неупругих реакций с мюонами.
- **Объект и предмет исследования исследования:** рассеяние мюонов на ядрах и кулоновские резонансы в сечении рассеяния
- **Теоретическая и практическая значимость исследования:** исследование позволит сделать заключение о возможности экспериментального наблюдения дипольных переходов в ядрах, что позволит получить дополнительную информацию о структурах атомных ядер, а также дать дополнительную информацию для анализа объектов мюонной томографии

РЕЗОНАНСНОЕ ПРЕДПОРОГОВОЕ УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

- Резонансное рассеяние – процесс, при котором система свободных частиц с кинетической энергией, переходит к связанному состоянию и далее возвращается в первоначальное состояние (рассеяние). Мюон, налетая на ядро, образует мезоатом с возбужденным ядром, и далее возбужденное ядро посредством ЭМ перехода возвращает мюону кинетическую энергию

$$E_{kin} + \varepsilon \to E_n + \varepsilon^*$$

- У предпороговой реакции есть энергетический порог : $E_{kin} \geq \varepsilon^* - |E_n|$



Мюон налетает на ядро

Мезоатом с возбужденным ядром

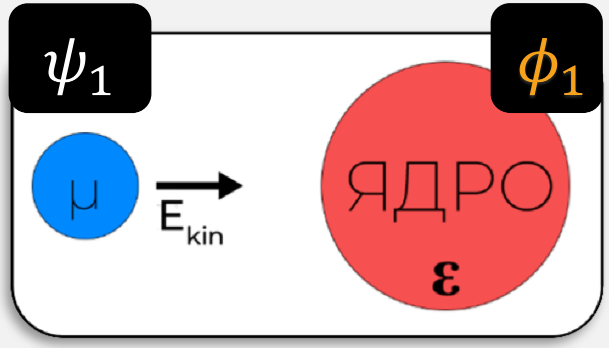
Упругое рассеяние

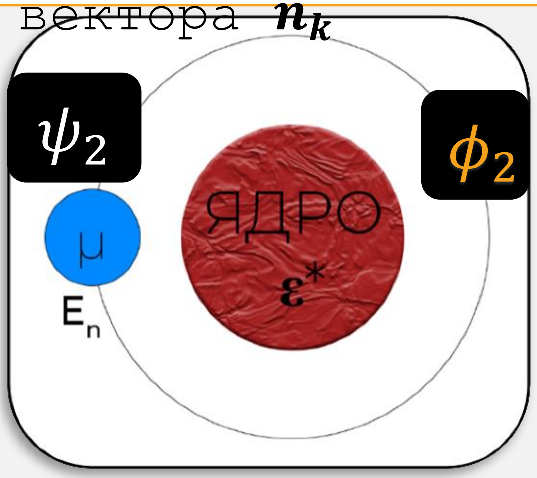
- Связанное состояние характеризуется временем жизни и энергетической шириной Г, которые зависят от параметров рассматриваемого ядра и кинетической энергии системы [1-3]

$$\Gamma = \frac{mk}{4\pi^2\hbar^2}\int |\langle\psi_2|\langle\phi_1|V|\phi_2\rangle|\psi_1\rangle|^2 d\Omega_{\mathrm{k}}$$

m – приведенная масса мюона и ядра, k – волновой вектор, ψ_2 – волновая функция мюона в стационарном состоянии на орбите ядра, ψ_1 – волновая функция мюона непрерывного спектра, ϕ_1 и ϕ_2 – волновые функции ядра в основном и возбужденном состояниях, V – кулоновский потенциал взаимодействия мюона с протонами ядра.

- Интегрирование по Ω_{k} – по направлению волнового вектора $\boldsymbol{n_k}$





1. Mukhametkaliuly A., Pen'kov F. M. Резонансное рассеяние μ-мезонов на атомных ядрах //Вестник. Серия Физическая (ВКФ). – 2023. – Т. 85. – №. 2. – 4-11 с.
2. Базь А. И., Зельдович Я. Б. Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике – М.: Наука. – 1971. – 544 с.
3. Feshbach H. Unified theory of nuclear reactions //Annals of Physics. – 1958. – Т. 5. – №. 4. – С. 357-390

- Помещаем начало координат в центр ядра: $\boldsymbol{r}$ – радиус вектор мюона, $\boldsymbol{r_i}$ – радиус вектор i-го протона. Потенциал:

$$V = -\sum \frac{e^2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_i}|} = |r \gg r_i| = -\frac{e^2 Z}{r} + \frac{e\boldsymbol{d}\boldsymbol{n_r}}{r^2} + \cdots$$

$\mathrm{Z}, \boldsymbol{d}$ – заряд и дипольный момент ядра.

Матричный элемент:

$$\langle\phi_1|V|\phi_2\rangle = -\frac{e^2 Z}{r}\langle\phi_1|\phi_2\rangle + \frac{e}{r^2}\langle\phi_1|\boldsymbol{d}\boldsymbol{n_r}|\phi_2\rangle + \cdots = \frac{e}{r^2}\langle\phi_1|P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n_r})d|\phi_2\rangle + \cdots$$

P_1 – полином Лежандра 1-й степени

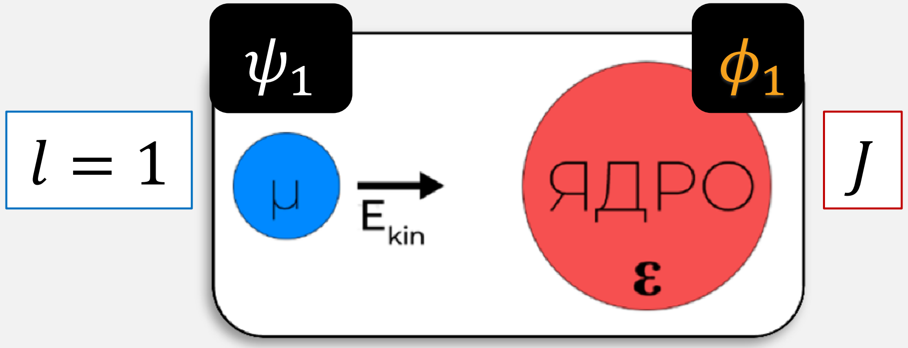
- Доминировать будут электрические дипольные переходы $\Delta J^P = 1^-$

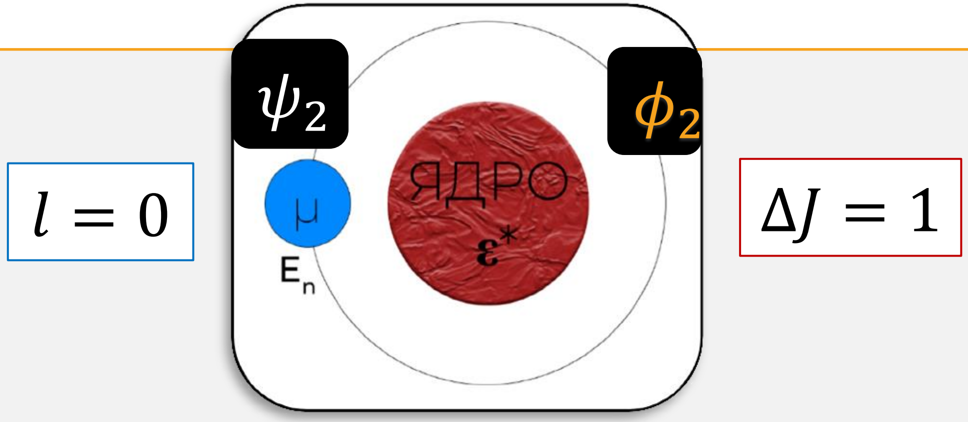
$$\langle\phi_1|V|\phi_2\rangle = \frac{e}{r^2}\langle\phi_1|P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n_r})d|\phi_2\rangle$$

- Вначале рассмотрим ситуацию формирования мезоатома в основном состоянии, т.е. с волновыми функциями для мюона со следующими квантовыми числами:

ψ_2: с главным числом $n = 1$ и числом орбитального момента $l = 0$

ψ_1: с числом орбитального момента $l = 1$





ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ФУНКЦИИ

Вначале в качестве функции непрерывного спектра мюона рассматривалась функция плоской волны, а при новом вычислении – более точная кулоновская функция непрерывного спектра. Были использованы хорошо известные функции плоской волны и кулоновские функции для положительных и отрицательных энергий [4]

1. Функция плоской волны мюона

$$\psi_1 = -\frac{3i}{k}\frac{d}{dr}\left(\frac{\sin(kr)}{kr}\right) P_1(\boldsymbol{n_k n_r})$$

2. Кулоновская функция мюона

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2\pi ka\left(1+\frac{1}{(ka)^2}\right)}{1-e^{-\frac{2\pi}{ka}}}}\,\frac{ie^{i\delta_1}}{a} re^{-ikr} F\left(\frac{i}{ka}+2, 4, 2ikr\right) P_1(\boldsymbol{n_k n_r})$$

В качестве функции связанного состояния везде используется

$$\psi_2 = \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{\sqrt{\pi a^3}}$$

$a -$ боровский радиус орбиты мюона, $F\left(\frac{i}{ka}+2, 4, 2ikr\right) -$ гипергеометрическая функция

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика: Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 1989. – 752 с.

ПОЛУЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ШИРИНЫ

Свойство полиномов Лежандра (нужно для вывода):

$$\int P_l(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)P_{l'}(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3)d\boldsymbol{n}_1 = \delta_{ll'}\frac{4\pi}{2l+1}P_l(\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)$$

Формула ширины:

$$\Gamma = \frac{mk}{4\pi^2\hbar^2}\int |\langle\psi_2|\langle\phi_1|V|\phi_2\rangle|\psi_1\rangle|^2 d\boldsymbol{n}_k$$

- Введем функцию ψ_1' без полинома P_1:

$$\psi_1 = \psi_1' P_1(\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_r)$$

Перепишем формулу ширины в виде интеграла:

$$\Gamma = \frac{me^2k}{4\pi^2\hbar^2}\int\left|\iint \psi_2\langle\phi_1|P_1(\boldsymbol{n}_d\boldsymbol{n}_r)d|\phi_2\rangle\psi_1'P_1(\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_r)dr\,d\boldsymbol{n}_r\right|^2 d\boldsymbol{n}_k =$$

$$= \frac{me^2k}{4\pi^2\hbar^2}\int\left|\int\psi_2\left\langle\phi_1\middle|d\int(P_1(\boldsymbol{n}_d\boldsymbol{n}_r)P_1(\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_r))d\boldsymbol{n}_r\middle|\phi_2\right\rangle\psi_1'dr\right|^2 d\boldsymbol{n}_k$$

Используем свойство полиномов выше:

$$\int P_1(\boldsymbol{n}_d\boldsymbol{n}_r)P_1(\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_r)d\boldsymbol{n}_r = \frac{4\pi}{3}P_1(\boldsymbol{n}_d\boldsymbol{n}_k)$$

Формула примет вид:

$$\Gamma = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2\frac{me^2k}{4\pi^2\hbar^2}\int\left(\left|\int\psi_2\langle\phi_1|P_1(\boldsymbol{n}_d\boldsymbol{n}_r)d|\phi_2\rangle\psi_1'dr\right|^2\right)d\boldsymbol{n}_k$$

Снова используем свойство полиномов

$$\int P_1(\boldsymbol{n}_d\boldsymbol{n}_k)P_1(\boldsymbol{n}_d\boldsymbol{n}_k)d\boldsymbol{n}_k = \frac{4\pi}{3}P_1(\boldsymbol{n}_d\boldsymbol{n}_d) = \frac{4\pi}{3}$$

а также перепишем матричный элемент

$$\langle\phi_1|d|\phi_2\rangle = d_{12}$$

- Конченое выражение примет вид

$$\Gamma = \frac{16\pi}{27}\frac{mke^2|d_{12}|^2}{\hbar^2}\left(\int_0^\infty\psi_2\,\psi_1'dr\int_0^\infty\psi_1'^*\,\psi_2^*dr\right)$$

- Используя выражение

$$\Gamma = \frac{16\pi}{27}\frac{mke^2|d_{12}|^2}{\hbar^2}\left(\int_0^\infty \psi_2\,\psi_1' dr \int_0^\infty \psi_1'^*\,\psi_2^* dr\right),$$

после интегрирования получены формулы ширин Γ_{el} и Γ_{elC} для 2-х случаев:

1) ψ_1 – функция плоской волны

$$\psi_1 = -\frac{3i}{k}\frac{d}{dr}\left(\frac{\sin(kr)}{kr}\right) P_1(\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_r)$$

$$\Gamma_{el} = \frac{16\, me^2|d_{12}|^2}{3\,\hbar^2 a^3 k}\left(1-\frac{\arctan(ka)}{ka}\right)^2$$

2) ψ_1 –кулоновская функция непрерывного спектра

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2\pi ka\left(1+\frac{1}{(ka)^2}\right)}{1-e^{-\frac{2\pi}{ka}}}}\,\frac{ie^{i\delta_1}}{a} re^{-ikr}\, F\left(\frac{i}{ka}+2, 4, 2ikr\right) P_1(\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_r)$$

$$\Gamma_{elC} = \frac{32\pi\, me^2|d_{12}|^2\left|F\left(\frac{i}{ka}+2\,,2\,,4,\frac{2ika}{1+ika}\right)\right|^2}{27\;\hbar^2 a^2(1-e^{-2\pi/ka})(1+(ka)^2)}$$

- Далее, для численной оценки ширины примем одночастичное дипольное возбуждение ядра с A нуклонами

$$d_{12} = eR = e * 1.4\, A^{1/3}$$

ШИРИНЫ РЕЗОНАНСОВ

- Посчитаны ширины для нескольких подходящих ядер; все ядра стабильны.

Ядро	Переход	E_1, МэВ	ε^*(эксп.), МэВ	E_{kin}, МэВ	Γ_{el}, эВ	Γ_{elc}, эВ
^{11}Be	$1/2^- \to 1/2^+$	0.045	0.32	0.275	7.8	9.81
^{13}C	$3/2^+ \to 1/2^-$	0.102	8.2	8.10	14	14.08
^{16}O	$1^- \to 0^+$	0.18	7.12	6.94	35	36.1
^{47}Ti	$3/2^+ \to 5/2^-$	1.362	1.83	0.468	88	698
^{75}As	$1/2^+ \to 3/2^-$	3.064	7.65	4.59	1083	2392
[illegible]	$1/2^- \to$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

E_1 – энергия связанного состояния мюона в мезоатоме (водородоподобный атом),
ε^* – энергия возбуждения ядра, E_{kin} – кинетическая энергия системы.

СООТНОШЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ШИРИН

$$\Gamma_{elC} = \frac{32\pi\, me^2 d^2 \left|F\left(\frac{i}{ka} + 2\,, 2\,, 4, \frac{2ika}{1+ika}\right)\right|^2}{27\ \hbar^2 a^2 (1 - e^{-2\pi/ka})(1 + (ka)^2)}$$

$$\Gamma_{el} = \frac{16\, me^2 d^2}{3\, \hbar^2 a^3 k}\left(1 - \frac{\arctan(ka)}{ka}\right)^2$$

$$\frac{\Gamma_{\mathrm{elC}}}{\Gamma_{\mathrm{el}}} = \frac{2\pi}{9}\frac{ka\left|F\left(\frac{i}{ka} + 2\,, 2\,, 4, \frac{2ika}{1+ika}\right)\right|^2}{\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{ka}}\right)(1 + (ka)^2)}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{me^2 Z}, Z \to 0, ka \to \infty$$

$$\lim_{ka\to\infty} \frac{\Gamma_{\mathrm{elC}}}{\Gamma_{\mathrm{el}}} = \frac{|F(2{,}2{,}4{,}2)|^2}{9} = 1$$

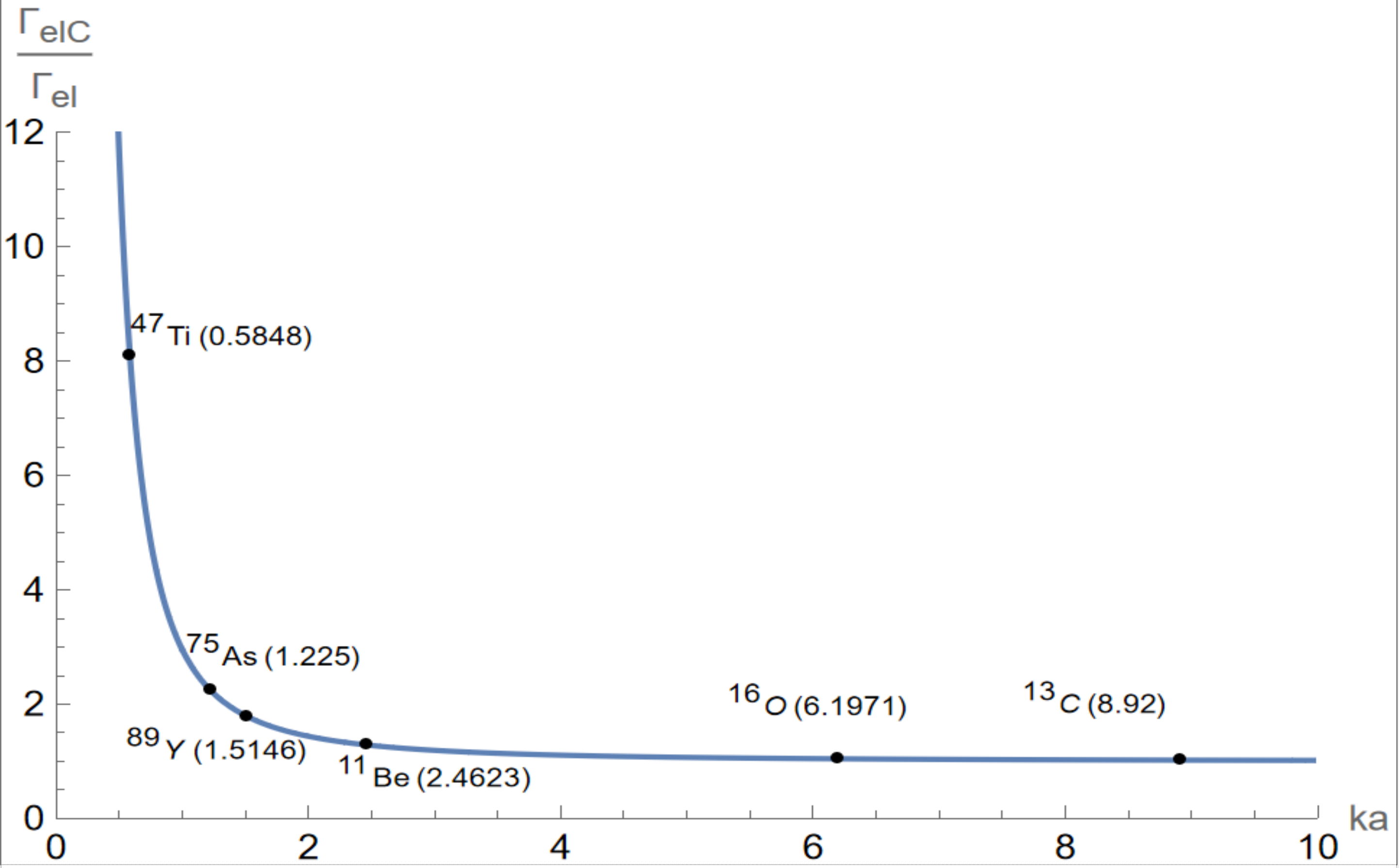


График зависимости отношения Γ_{elC}/Γ_{el} от ka. На графике обозначены ядра и соответствующие значения ka в скобках.

- При $ka \gg 1$ Γ_{elC} асимптотически стремится к Γ_{el}.
- Как видно из таблицы, для титана заметно ощутимое увеличение ширины при учете кулоновского взаимодействия.

ВОЗМОЖНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ

Ядро	E_{kin}, МэВ	Γ_{elc}, эВ	Γ_{elc}/E_{kin}
^{11}Be	0.275	9.81	$3.5 \cdot 10^{-5}$
^{13}C	8.10	14.08	$1.7 \cdot 10^{-6}$
^{16}O	6.94	36.1	$5.2 \cdot 10^{-6}$
^{47}Ti	0.468	698	$1.5 \cdot 10^{-3}$
^{75}As	4.59	2392	$5.2 \cdot 10^{-4}$
^{89}Y	9.79	3852	$3.9 \cdot 10^{-4}$

$\boxed{d_{12} = eR}$

- Предполагалось, измеряя ширину экспериментально, вычислять значение матричного элемента $\langle \phi_1 | d | \phi_2 \rangle = d_{12}$.
- Мюонная техника позволяет получать энергетическое разрешение пучков до 10^{-4} [5,6].Измерений с легкими ядрами не провести.

5. Delahaye J. P. et al. Muon colliders //arXiv preprint arXiv:1901.06150. – 2019
6. Grillenberger J., Baumgarten C., Seidel M. The high intensity proton accelerator facility //SciPost Physics Proceedings. – 2021. – №. 5. – P. 002.1-002.18

ШИРИНА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ВОЗБУЖДЕННОГО МЕЗОАТОМА

- Ширина рассеяния ($ka \gg 1$) для возбужденного мезоатома в состоянии 2S, когда мюон находится на второй орбите для волновой функции связанного состояния $\psi_2\,(n = 2, l = 0)$

$$\psi_2 = \frac{e^{-\frac{r}{2a_2}}\left(1 - \frac{r}{2a_2}\right)}{\sqrt{8\pi a_2^3}}$$

имеет вид

$$\Gamma_{el2} = \frac{2}{3}\frac{me^2|d_{12}|^2}{k_2 a_2^3 \hbar^2}\left(\frac{2\,arctg(2a_2k_2) - 2a_2k_2\left(1 + \frac{1}{1 + (2a_2k_2)^2}\right)}{2a_2k_2}\right)^2$$

- Сравнение с выражением ширины Γ_{el} для мезоатома в основном состоянии

$$\Gamma_{el1} = \frac{16}{3}\frac{me^2d^2}{\hbar^2a^3k}\left(1 - \frac{\arctan(ka)}{ka}\right)^2$$

дает соотношение

$$\frac{\Gamma_{el2}}{\Gamma_{el1}} \approx 2\cdot 10^{-3}$$

- Здесь измерения тем более не выполнимы.

СРАВНЕНИЕ С ШИРИНАМИ ЯДЕРНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Ядро	Γ_{elc}, эВ	Γ_N, эВ	Моды распада
^{11}Be	9.81	$5 \cdot 10^4$	γ, [7]
^{13}C	14.08	$1.1 \cdot 10^6$	γ, n, [8]
^{16}O	36.1	$5.2 \cdot 10^{-2}$	γ, [9]
^{47}Ti	698	$3.1 \cdot 10^{-4}$	γ, [11]
^{75}As	2392	0.55	γ, [11]
^{89}Y	3852	$5 \cdot 10^4$	γ, [12]

ПОЛНЫЕ СЕЧЕНИЯ РЕАКЦИИ

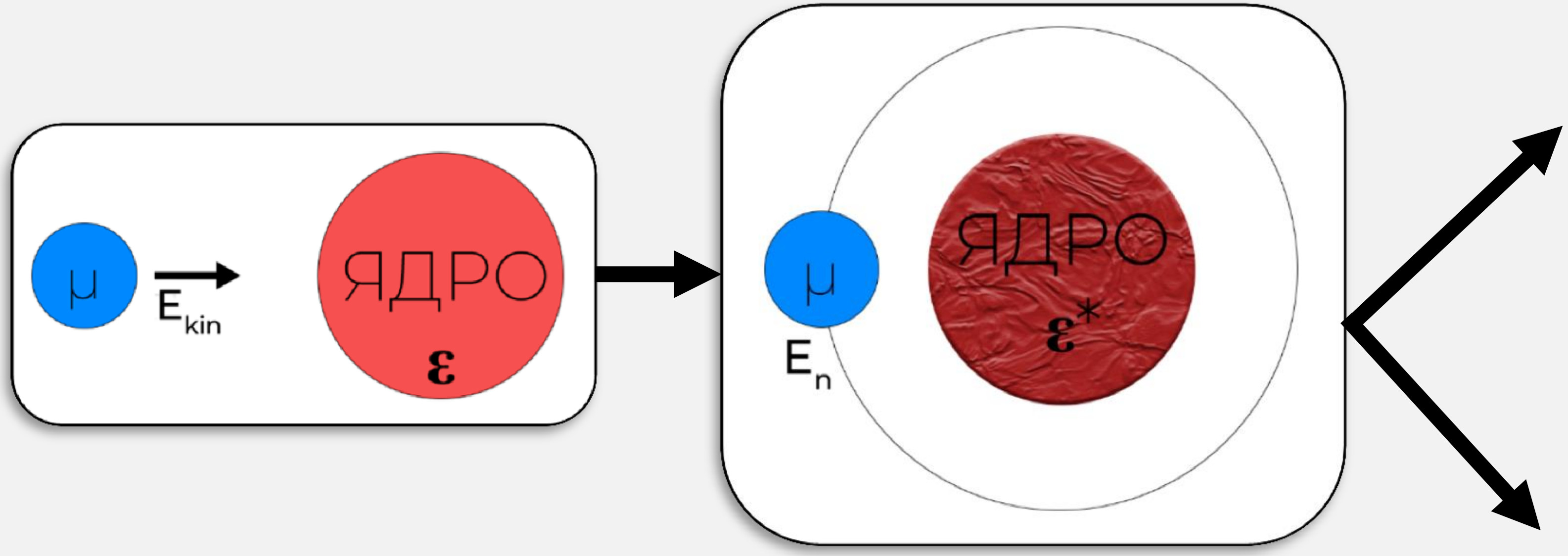
Ядро	σ_t, б
^{11}Be	0.05
^{13}C	$1.1 \cdot 10^{-4}$
^{16}O	10.1
^{47}Ti	149.6
^{75}As	15.1
^{89}Y	0.55

$$\sigma_t = \frac{12\pi}{k^2}, \Gamma_{elC} \gg \Gamma_N$$

$$\sigma_t = \frac{12\pi}{k^2}\frac{\Gamma_{elC}}{\Gamma_N}, \Gamma_N \gg \Gamma_{elC}$$

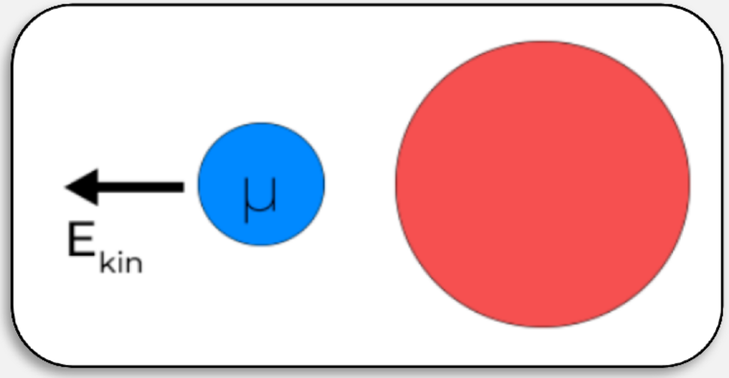
7. Nakamura T. et al. Coulomb excitation of 11Be //Physics Letters B. – 1997. – Vol. 394. – №. 1-2. – P. 11-15.
8. Ajzenberg-Selove F. Energy levels of light nuclei A= 3-15 //Nucl. Phys. – 1976. – Vol. 268. – P. 1.
9. Tilley D. R., Weller H. R., Cheves C. M. Energy levels of light nuclei A= 16-17 //Nuclear Physics A. – 1993. – Vol. 564. – №. 1. – P. 1-183
10. NRV low energy Nuclear Knowledge Base http://nrv.jinr.ru/nrv/
11. NNDC Nuclear Data Center https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/indx_adopted.jsp

СХЕМА РЕАКЦИИ

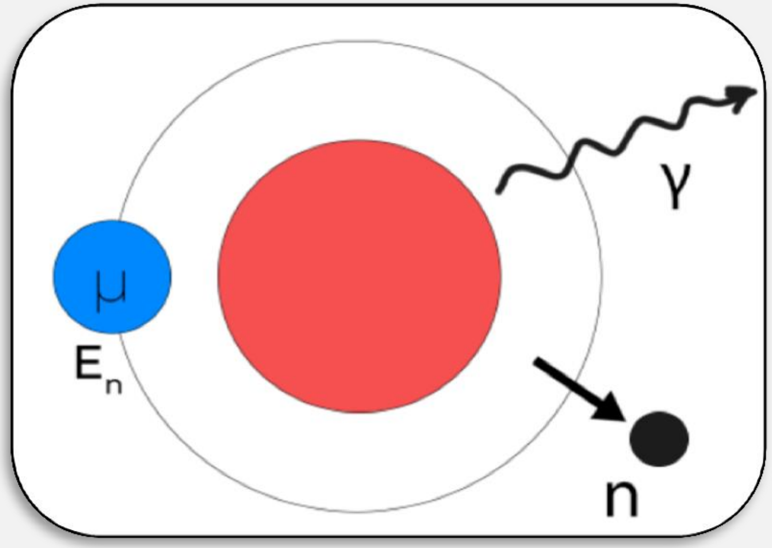


Мезон налетает на ядро

Мезоатом с возбужденным ядром



$\Gamma_N < \Gamma_{elc}$
Упругое рассеяние



$\Gamma_N > \Gamma_{elc}$
Неупругая реакция

- При условии $\Gamma_N > \Gamma_{elc}$, т.е. $\tau_{el} > \tau_N$ в первую очередь будет происходить ядерный переход с образованием мезоатома. Это означает, что возможны резонансные ядерные реакции с мезонами, в результате которых будут испущены γ-кванты, нейтроны или более тяжелые кластеры.

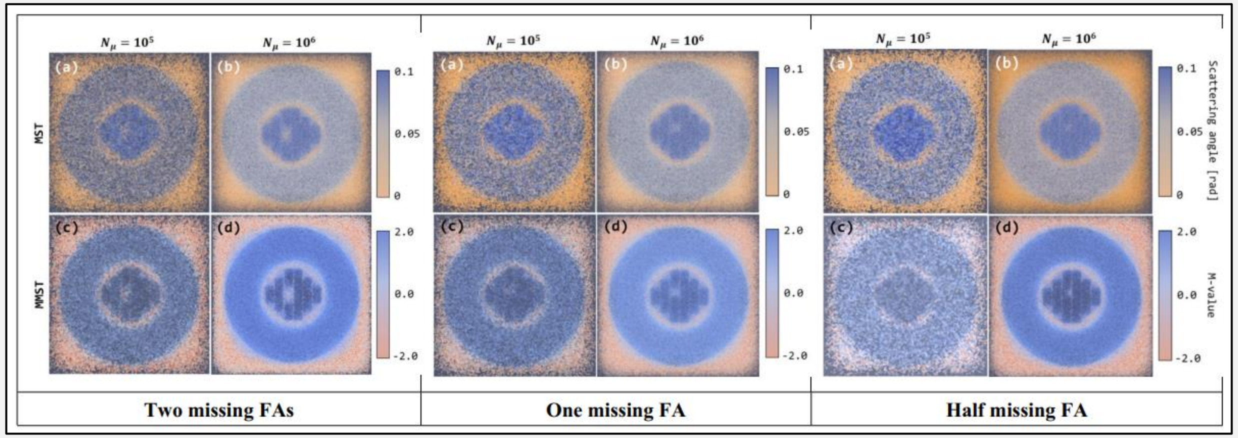
ВЫВОДЫ

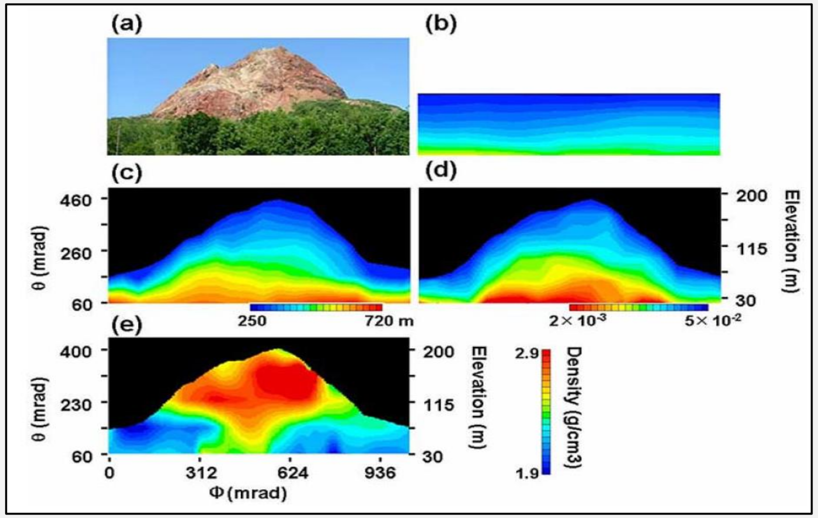
- Эксперименты для определения матричных элементов дипольных переходов в легких ядрах на сегодняшний день невыполнимы, поскольку относительная ширина меньше существующего разрешения по энергии мюонных пучков на фабриках и составляет $\sim 10^{-4}$
  - Ширины упругих резонансов на тяжелых ядрах титана, мышьяка и иттрия могут быть определены уже при существующей технологии получения мюонных пучков.

- Возникает возможность резонансного возбуждения ядер за счет мюонов с последующим ядерным распадом возбужденного ядра. Можно говорить о распаде резонансно возбужденного ядра.
  - При этом, с учетом параметров гигантских дипольных резонансов, резонансные распады ядер можно распространить и на резонансное деление тяжелых ядер.
  - В случае ядерного перехода можно определить свойства и структуру ядер или состав мишени

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РЕЗОНАНСНОГО РАСПАДА В МЮОНОГРАФИИ

Ядро	Γ_{elc}, эВ	Γ_N, эВ	Моды распада
^{13}C	14.08	$1.1 \cdot 10^6$	γ, n [5]
^{89}Y	3852	$5 \cdot 10^4$	γ,[8]





- Условию $\Gamma_N > \Gamma_{elc}$ соответствуют ядра ^{13}C и ^{89}Y из таблицы.
- Мюонная радиография основывается на процессах рассеяния и поглощения в веществе с последующей регистрацией потока прошедших мюонов. В качестве источника мюонов в этом методе используется естественный поток космического излучения, регистрация происходит с помощью детекторов ядерной эмульсии. Результатом радиографии является мюонное изображение объекта.
- На рисунках изображены картины мюонной томографии вулканического купола Сёва-синзан (Япония) [12] и отработанного ядерного топлива в сухом контейнере для хранения [13]

12. Tanaka H. K. M. et al. Imaging the conduit size of the dome with cosmic-ray muons//Geophysical Research Letters. – 2007. – Т. 34. – №. 22.
13. Bae J. H., Montgomery R., Chatzidakis S. Momentum informed muon scattering tomography //Scientific Reports. – 2024. – Т.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. A. Mukhametkaliuly, F.M. Pen'kov, Resonant scattering of μ- mesons by atomic nuclei. Recent Contributions to Physics. 2023. №2 (85). P. 4-11
2. Базь А. И., Зельдович Я. Б. Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике – М.: Наука. – 1971. – 544 с.
3. Feshbach H. Unified theory of nuclear reactions //Annals of Physics. – 1958. – Т. 5. – №. 4. – С. 357-390
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика: Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 1989. – 752 с.
5. Nakamura T. et al. Coulomb excitation of 11Be //Physics Letters B. – 1997. – Vol. 394. – №. 1-2. – P. 11-15.
6. Ajzenberg-Selove F. Energy levels of light nuclei A= 3-15 //Nucl. Phys. – 1976. – Vol. 268. – P. 1.
7. Tilley D. R., Weller H. R., Cheves C. M. Energy levels of light nuclei A= 16-17 //Nuclear Physics A. – 1993. – Vol. 564. – №. 1. – P. 1-183
8. NRV low energy Nuclear Knowledge Base http://nrv.jinr.ru/nrv/
9. NNDC Nuclear Data Center https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/indx_adopted.jsp
10. Delahaye J. P. et al. Muon colliders //arXiv preprint arXiv:1901.06150. – 2019
11. Grillenberger J., Baumgarten C., Seidel M. The high intensity proton accelerator facility //SciPost Physics Proceedings. – 2021. – №. 5. – P. 002.1-002.18
12. Tanaka H. K. M. et al. Imaging the conduit size of the dome with cosmic-ray muons: The

ПРИЛОЖЕНИЕ (РАСЧЕТЫ)

Записываем выражение для ширины дипольного перехода

$$\Gamma = \frac{mk}{\pi}\int \left|\left\langle \psi_{22}\left|\left\langle \phi_1\left|\frac{(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})d}{r^2}\right|\phi_2\right\rangle\right|\psi_{11}\right\rangle\right|^2 \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (1)$$

Расписываем дипольный потенциал через полином Лежандра по формуле (M1)

$$\left\langle \psi_{22}\left|\left\langle \phi_1\left|\frac{(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n_r})d}{r^2}\right|\phi_2\right\rangle\right|\psi_{11}\right\rangle = \left\langle \psi_{22}\left|\left\langle \phi_1\left|\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})d}{r^2}\right|\phi_2\right\rangle\right|\psi_{11}\right\rangle$$

$$\langle \phi_1|d|\phi_2\rangle = d_{12}$$

Переписываем в виде интеграла матричный элемент внешних функций (мезонных), здесь интегрирование идет по направлению радиус вектора $d^3\boldsymbol{r} = d^3 r d\boldsymbol{n}$

$$\left\langle \psi_{22}\left|\left\langle \phi_1\left|\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})d}{r^2}\right|\phi_2\right\rangle\right|\psi_{11}\right\rangle = d_{12}\left\langle \psi_{22}\left|\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n_r})}{r^2}\right|\psi_{11}\right\rangle = d_{12}\iint \psi_{22}\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})}{r^2}\psi_{11}d\boldsymbol{n}r^2dr$$

(2)

$$\psi_{22}(l=0) = \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{\sqrt{\pi a^3}}$$

Возвращаемся к (1) подставляя туда (2)

$$\Gamma = \frac{mk}{\pi}\int \left| d_{12}\iint \psi_{22}\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})}{r^2}\psi_{11}r^2 d\boldsymbol{n}dr\right|^2 \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Теперь раскрываем квадрат модуля

$$\left| d_{12}\iint \psi_{22}\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})}{r^2}\psi_{11}d\boldsymbol{n}dr\right|^2$$

$$= d_{12}^2\iint \psi_{22}\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})}{r^2}\psi_{11}r^2 d\boldsymbol{n}dr * \iint \psi_{11}\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})}{r^2}\psi_{22}r^2 d\boldsymbol{n}dr$$

Ширина перепишется

$$\Gamma = \frac{mk}{\pi}\int\left(d_{12}^2\iint \psi_{22}\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})}{r^2}\psi_{11}r^2 d\boldsymbol{n}dr * \iint \psi_{11}\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})}{r^2}\psi_{22}r^2 d\boldsymbol{n}dr\right)\frac{d\Omega}{4\pi}$$

Сейчас нужно показать вид функции ψ_{11} , которая содержит полином Лежандра от направлений $P_1(\boldsymbol{kn})$

$$\psi_{11}(l=1) - \frac{3i}{k}P_1(\boldsymbol{kn})\frac{d}{dr}\left(\frac{sinkr}{kr}\right)$$

Для удобства обозначаем функцию ψ_{11} без полинома Лежандра $\psi'_{11} = -\frac{3i}{k}\frac{d}{dr}\left(\frac{sinkr}{kr}\right)$.

$$\Gamma = \frac{mk}{\pi}\int\left(d_{12}^2\iint \psi_{22}\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})P_1(\boldsymbol{kn})}{r^2}\psi'_{11}r^2 d\boldsymbol{n}dr\right.$$
$$\left. * \iint \psi'_{11}\frac{P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})P_1(\boldsymbol{kn})}{r^2}\psi_{22}r^2 d\boldsymbol{n}dr\right)\frac{d\Omega}{4\pi}$$

Воспользуемся свойством (M2) для полиномов Лежандра чтобы избавиться от интегрирования по $\boldsymbol{n}$. Видно, что этот полином не зависит от r и выносится в интегрирование по Ω

$$\int P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n})P_1(\boldsymbol{kn})d\boldsymbol{n} = \frac{4\pi}{3}P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{k})$$

$$\Gamma = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2\frac{mk}{\pi}\int P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{k})\left(d_{12}^2\int \psi_{22}\frac{1}{r^2}\psi'_{11}r^2dr * \int \psi'_{11}\frac{1}{r^2}\psi_{22}r^2dr\right)P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{k})\frac{d\Omega}{4\pi}$$

Интегрирование по $d\Omega$ означает интегрирование по вектору $\boldsymbol{n_k}$. Снова используем (M2) и избавляемся от $d\Omega$

$$\int P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{k})P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k} = \frac{4\pi}{3}P_1(\boldsymbol{n_d}\boldsymbol{n_d}) = \frac{4\pi}{3}$$

$$\Gamma = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^3\frac{1}{4\pi}\frac{mk}{\pi}\left(d_{12}^2\int r^2\psi_{22}\frac{1}{r^2}\psi'_{11}dr * \int r^2\psi'_{11}\frac{1}{r^2}\psi_{22}dr\right)$$

P

$$P_l(\boldsymbol{nn'}) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\boldsymbol{n'})\,Y_{lm}(\boldsymbol{n}) \qquad \text{(M1)}$$

Формула из свойства полиномов Лежандра

$$\int P_l(\boldsymbol{n_1 n_2})P_{l'}(\boldsymbol{n_1 n_3})do = \delta_{ll'}\frac{4\pi}{2l+1}P_l(\boldsymbol{n_2 n_3}) \qquad \text{(M2)}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ (РАСЧЕТЫ)

$$\psi_{11}(l=1)=\left(\frac{8\pi ka\left(1+\frac{1}{(ka)^2}\right)}{1-e^{-\frac{2\pi}{ka}}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}\,re^{-ikr}F\left(\frac{i}{ka}+2,4,2ikr\right)*3iP_1$$

Конечное выражение ширины после интегрирования по углам через полиномы Лежандра, $\psi'_{11}-$ функция ψ_{11} без P_1

$$\Gamma=\left(\frac{4\pi}{3}\right)^3\frac{1}{4\pi}\frac{mk}{\pi}\left(d_{12}^2\int r^2\psi_{22}\frac{1}{r^2}\psi'_{11}dr*\int r^2\psi'_{11}\frac{1}{r^2}\psi_{22}dr\right)$$

$$\left(\frac{8\pi ka\left(1+\frac{1}{(ka)^2}\right)}{1-e^{-\frac{2\pi}{ka}}}\right)^{\frac{1}{2}}*\frac{i}{2}*\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}=\mathcal{C}$$

$$\int r^2\psi_{22}\frac{1}{r^2}\psi'_{11}dr=\mathcal{C}\int\psi_{22}\psi'_{11}dr=\mathcal{C}\int re^{-ikr}e^{-\frac{r}{a}}F\left(\frac{i}{ka}+2,4,2ikr\right)dr$$

$$=\mathcal{C}\int re^{-\frac{r}{a}-ikr}F\left(\frac{i}{ka}+2,4,2ikr\right)dr$$

Интегрирование с гипергеометрической функцией

$$J_{\alpha\gamma}^{\nu}=\int_0^\infty e^{-\lambda z}z^\nu F(\alpha,\gamma,kz)dz=\Gamma(\nu+1)\lambda^{-\nu-1}F\left(\alpha,\nu+1,\gamma,\frac{k}{\lambda}\right)$$

Коэффициенты в выражении интеграла от гипергеом функции: $\alpha=\frac{i}{ka}+2$, $\gamma=4$, $z=r$, $k=2ik$, $\lambda=\frac{1}{a}+ik$, $\nu=1$

$$J_{1/ka+2,\,4}^{1}=\Gamma(2)\left(\frac{1}{a}+ik\right)^{-2}F\left(\frac{i}{ka}+2,2,4,\frac{2ik}{\frac{1}{a}+ik}\right)$$

Подставить в ширину

$$\mathcal{C}\int re^{-\frac{r}{a}-ikr}F\left(\frac{i}{ka}+2,2,4,\frac{2ik}{\frac{1}{a}+ik}\right)dr=\mathcal{C}\,\Gamma(2)\left(\frac{1}{a}+ik\right)^{-2}F\left(\frac{i}{ka}+2,2,4,\frac{2ik\left(\frac{1}{a}-ik\right)}{\frac{1}{a^2}+k^2}\right)$$

$$\mathcal{C}^*\frac{\frac{1}{a^2}+k^2+\frac{2ik}{a}}{\left(\frac{1}{a^2}+k^2\right)^2}F\left(\frac{-i}{ka}+2,2,4,\frac{-\frac{2ik}{a}+2k^2}{\frac{1}{a^2}+k^2}\right)$$

$$\Gamma=\left(\frac{4\pi}{3}\right)^3d_{12}^2\frac{1}{4\pi}\frac{mk}{\pi}\frac{\mathcal{C}^*\mathcal{C}}{\left(\left(\frac{1}{a}+ik\right)\left(\frac{1}{a}-ik\right)\right)^2}F\left(\frac{i}{ka}+2,2,4,\frac{2ik}{\frac{1}{a}+ik}\right)F\left(\frac{-i}{ka}+2,2,4,\frac{2ik}{-\frac{1}{a}+ik}\right)$$

$$\Gamma=\frac{16\pi}{27\hbar^2}mkd_{12}^2\frac{\mathcal{C}^*\mathcal{C}}{\left(\frac{1}{a^2}+k^2\right)^2}F\left(\frac{i}{ka}+2,2,4,\frac{2ik}{\frac{1}{a}+ik}\right)F\left(\frac{-i}{ka}+2,2,4,\frac{2ik}{-\frac{1}{a}+ik}\right)$$

$$\Gamma=\frac{32\pi\,md^2\left|F\left(\frac{i}{ka}+2,2,4,\frac{2ika}{1+ika}\right)\right|^2}{27\,\hbar^2a^2(1-e^{-2\pi/ka})(1+(ka)^2)}$$