

Высокочастотная динамика. Недостающее звено в эволюции динамики

Беляев А.К.

**Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого**

Хабаровск 2024

Высокочастотная динамика. Недостающее звено в эволюции динамики.

Беляев А.К.

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Winnie the Pooh, A.Milne



The old grey donkey, Eeyore stood by himself in a thistly corner of the Forest, his front feet well apart, his head on one side, and thought about things.

**Sometimes he thought sadly to himself, "Why?"
and sometimes he thought, "Wherefore?"
and sometimes he thought, "Inasmuch as which?"
and sometimes he didn't quite know what he was thinking about.**



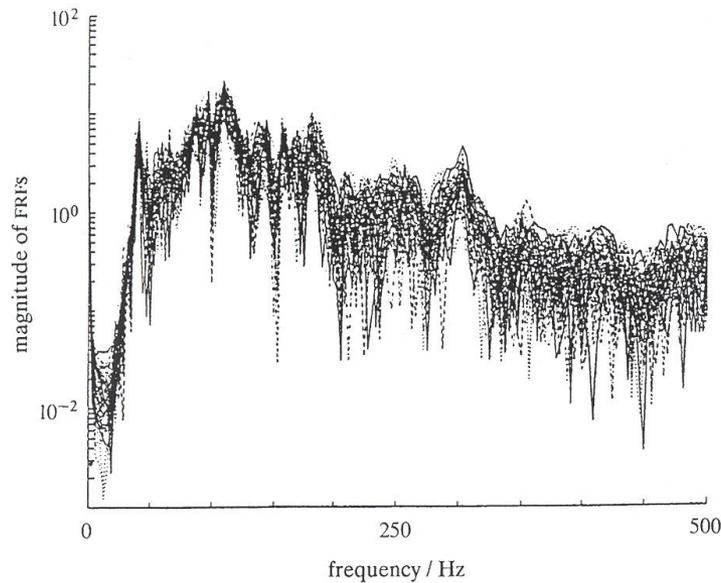
The point of (natural) philosophy is to start with something so simple as not to seem worth stating, and to end with something so paradoxical that no one will believe it.

Bertrand Russell, *The Philosophy of Logical Atomism*

инженерные объекты: корабли, ракеты, самолеты, здания и т.д.

свойства:

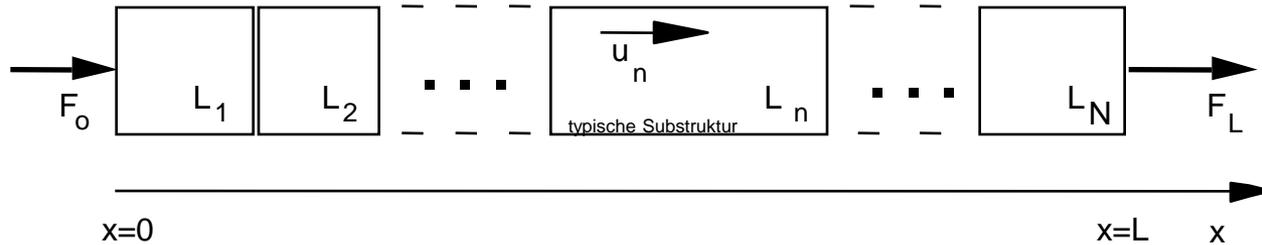
1. состоят из подструктур
2. существенно неоднородные системы
3. динамически слабосвязанные системы
4. статистически недостоверные параметры



Magnitudes of the 57 structure-borne FRFs for the pickup trucks for the driver microphone.

M.S. Kompella & B.J. Bernhard 1993
Measurement of the statistical
variation of structural-acoustic
characteristics of automotive vehicles.
SAE Noise & Vibration Conference,
Society of Automotive Engineers

1-D конструкция



где $u_n(x, t)$ – продольное смещение подструктуры L_n

модальный анализ

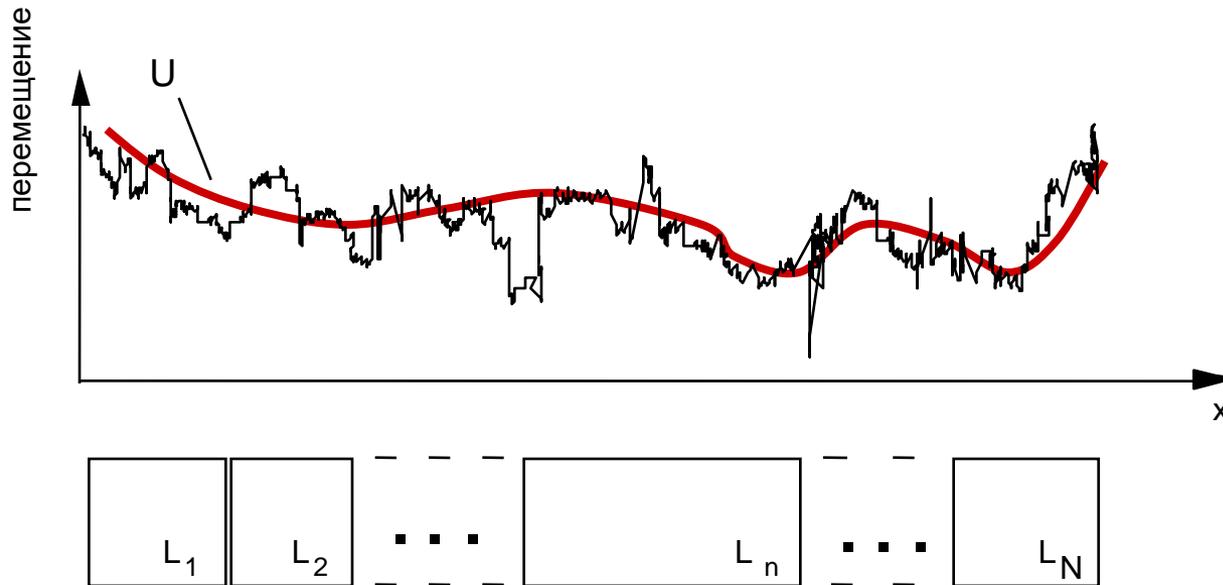
$$x \in L_n, \quad u_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{nk}(x) q_{nk}(t) + U(x, t)$$

где $V_{nk}(x)$ – форма колебаний подструктуры L_n
 $q_{nk}(t)$ – обобщенная координата

предположение

$U(x, t)$ - макропараметр = среднее поле, т.е. гладкая функция координаты x .

$$x \in L_n, \quad u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{nk}(x) q_{nk}(t) + U(x,t)$$



Формы колебаний подсистем выбираются в предположении о нулевом перемещении на границах подструктур =>

$U(x,t)$ – перемещение несущей конструкции,
 модальная сумма описывает динамику подструктур,

метод многих масштабов

1. U - гладкая функция координаты x
2. Формы колебаний, массовые и жесткостные параметры – быстро меняющиеся функции координаты x

граничная задача во временной области

Диф. уравнения:

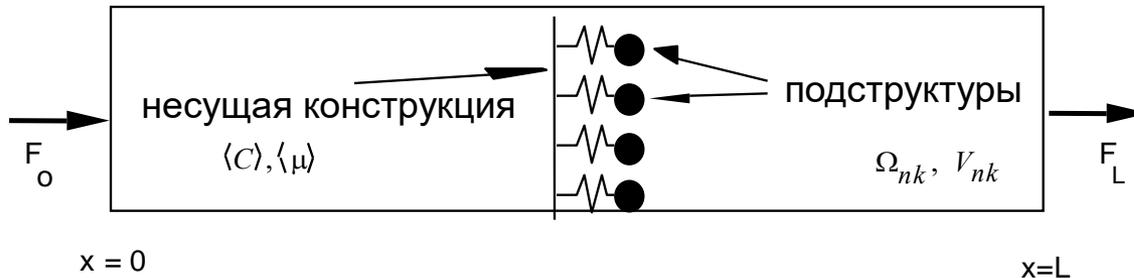
$$0 < x < L; \quad \langle C \rangle \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \langle \mu \rangle \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \langle V_{nk} \rangle \frac{d^2 q_{nk}}{dt^2} \right] = 0$$

$$x \in L_n; \quad \frac{\partial^2 q_{nk}}{\partial t^2} + \Omega_{nk}^2 q_{nk} = -\langle \mu \rangle \langle V_{nk} \rangle L_n \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

Граничн. условия:

$$x = 0; \quad \langle C \rangle \frac{\partial U}{\partial x} = -F_0; \quad x = L; \quad \langle C \rangle \frac{\partial U}{\partial x} = F_L$$

где $\langle C \rangle$ - средняя жесткость, $\langle \mu \rangle$ - средняя погонная масса



спектральное представление

$$F_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_o(\omega) e^{i\omega t} d\omega ; \quad U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(x,\omega) e^{i\omega t} d\omega ; \quad q_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad etc$$

граничная задача в частотной области

$$0 < x < L ; \quad \langle C \rangle \frac{d^2 \tilde{U}}{dx^2} + \omega^2 M(\omega) \tilde{U} = 0$$

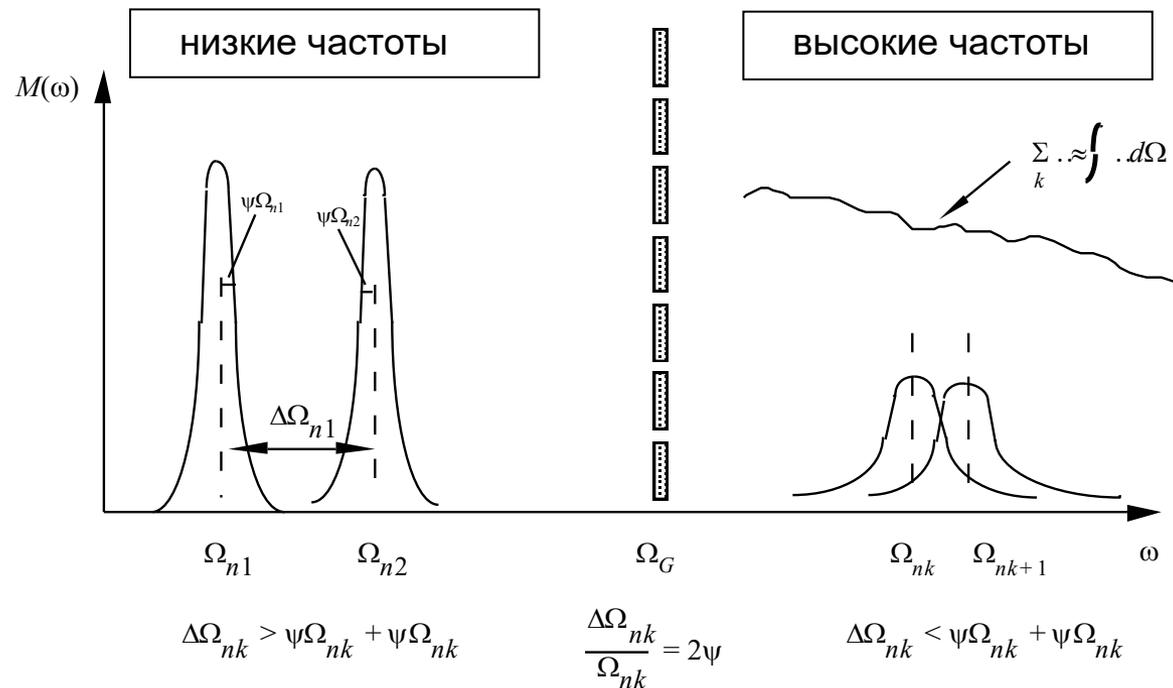
$$x=0 ; \quad \langle C \rangle \frac{d\tilde{U}}{dx} = -\tilde{F}_o ; \quad x=L ; \quad \langle C \rangle \frac{d\tilde{U}}{dx} = \tilde{F}_L$$

$$\text{где} \quad M(\omega) = \langle \mu \rangle + \langle \mu \rangle^2 \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle V_{nk} \rangle^2 L_n}{-\omega^2 + 2i\psi \omega \Omega_{nk} + \Omega_{nk}^2}$$

$M(\omega)$ - эффективная масса

ψ - демпфирование

$$M(\omega) = \langle \mu \rangle + \langle \mu \rangle^2 \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle V_{nk} \rangle^2 L_n}{-\omega^2 + 2i\psi\omega\Omega_{nk} + \Omega_{nk}^2}$$



на высоких частотах $\omega > \Omega_G$ (граничная частота)

$$M(\omega) = \langle \mu \rangle \left[1 + \langle \mu \rangle \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v_{nk} \rangle^2 L_n}{-\omega^2 + 2i\psi\omega\Omega_{nk} + \Omega_{nk}^2} \right] = \langle \mu \rangle \left[1 + \omega^2 \int_{\Omega_G}^{\infty} \frac{\Phi(\Omega) d\Omega}{-\omega^2 + 2i\psi\omega\Omega + \Omega^2} \right]$$

где $\Phi(\Omega)$ - плотность спектра собственных частот

параметр $\kappa(\omega)$ определяет поглощение энергии в конструкции

$$M(\omega) = \langle \mu \rangle [1 - i\kappa(\omega)]^2 ; \quad \kappa(\omega) = \omega^2 \int_{\Omega_G}^{\infty} \frac{\psi \Omega \Phi(\Omega) d\Omega}{(-\omega^2 + \Omega^2)^2 + 4\psi^2 \omega^2 \Omega^2}$$

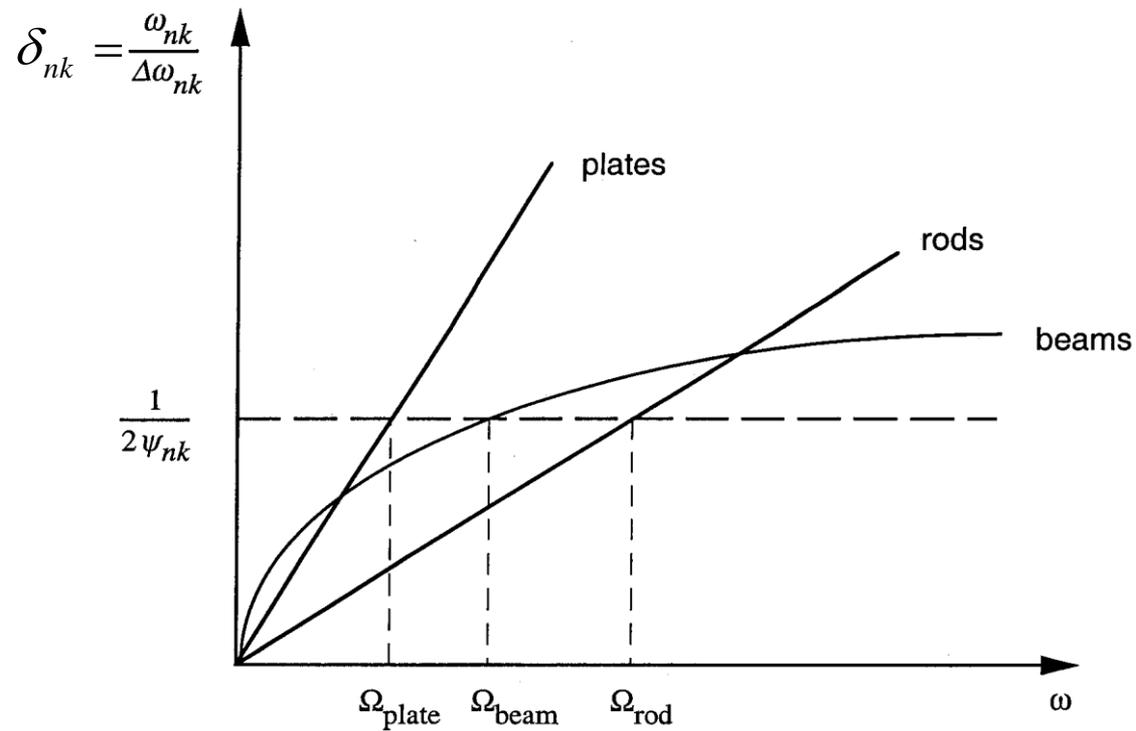
предельный случай : исчезающе малое демпфирование

$$(\psi \rightarrow 0) \Rightarrow \kappa(\omega) = \frac{\pi}{2} \omega \Phi(\omega) \quad - \text{резонансное поглощение энергии в конструкции}$$

Вывод: для каждой конструкции с относительной плотностью собственных частот и демпфированием существует граничная частота Ω_G .

При ее превышении ($\omega > \Omega_G$) любая конструкция ведет себя как механическая система со сплошным спектром собственных частот.

Подсистемы играют роль динамических гасителей для несущей конструкции (резонансное поглощение энергии в конструкции).



critical frequency for rods, beams and plates

from the equation $\delta_{nk} \psi_{nk} = 2$

MODAL DENSITY OF HONEYCOMB PLATES

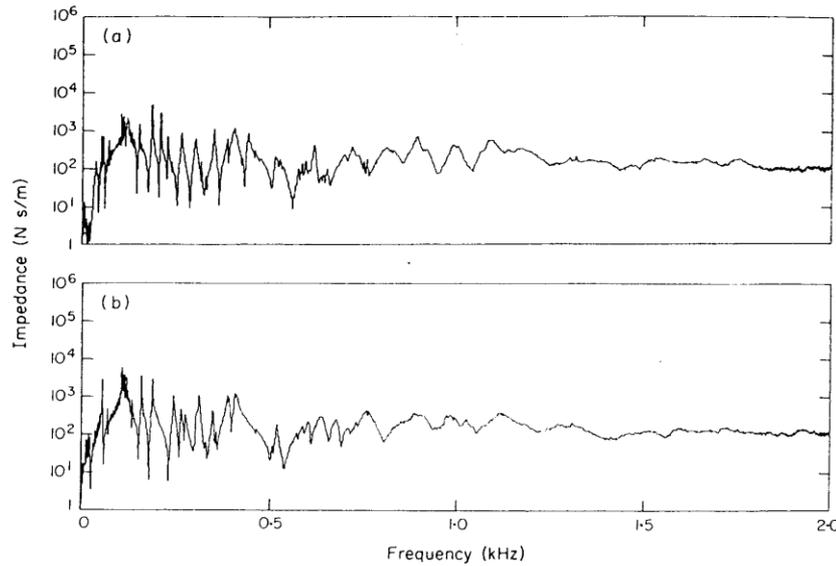


Figure 18. Modulus of driving point impedance for MAROTS side wall panels. (a) Sidewall panel 1; (b) sidewall panel 2.

B.L. Clarkson and M.F. Ranky 1983 Modal density of honeycomb plates. *Journal of Sound and Vibration* **91**, 103-118.

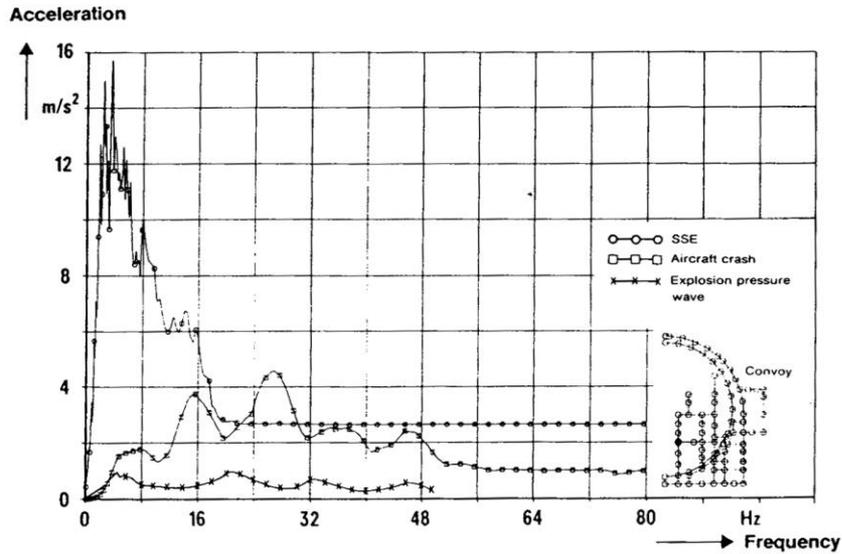
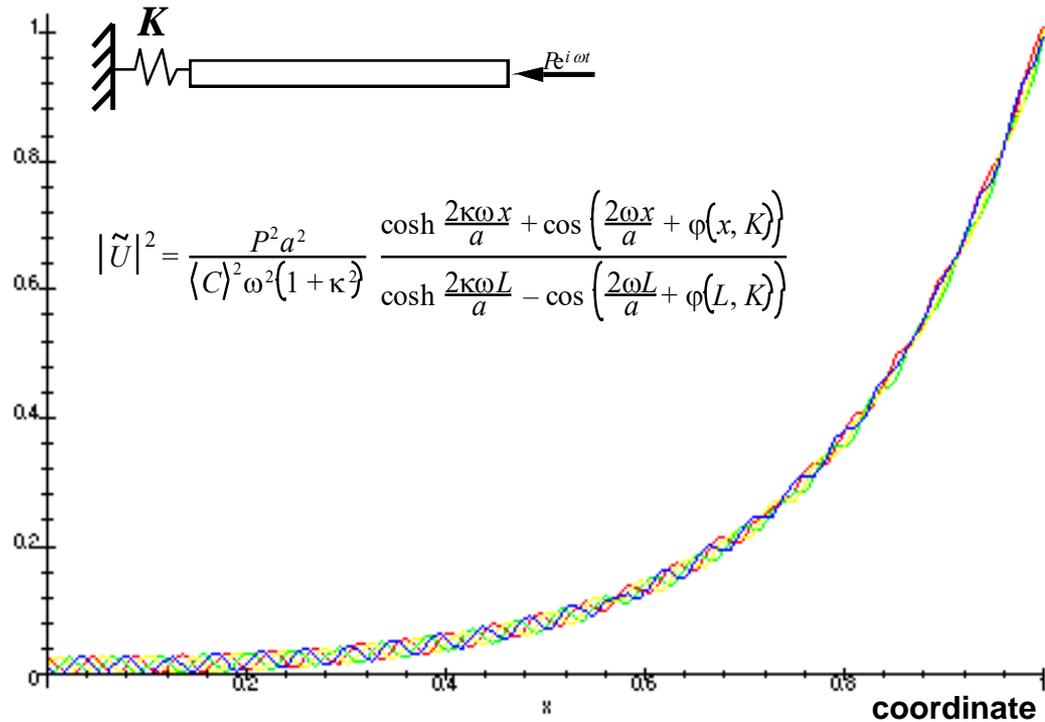


Fig. 4. Comparison of structural responses induced by natural and external man-made hazards, reactor building, vertical direction.

N.J. Krutzik 1988 Reduction of the dynamic response by aircraft crash on building structures. *Nuclear Engineering and Design* **110**, 191-200.

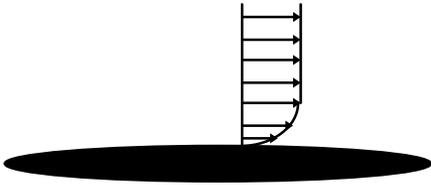
1-D structure, transfer function vs. coordinate



Square of transfer function vs. coordinate for 5 different values of the coupling stiffness $K \in [0, \infty)$

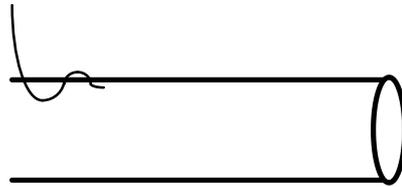
boundary layer effects

hydromechanics



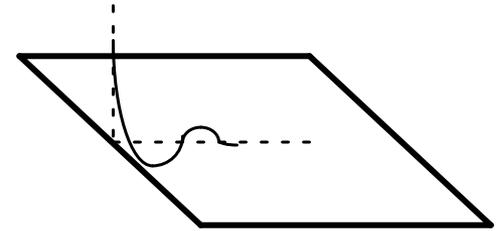
$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

bending of thin elastic shells



$$h^2 R^2 \frac{d^4 u}{dx^4} + 12(1 - \nu^2) u = 0$$

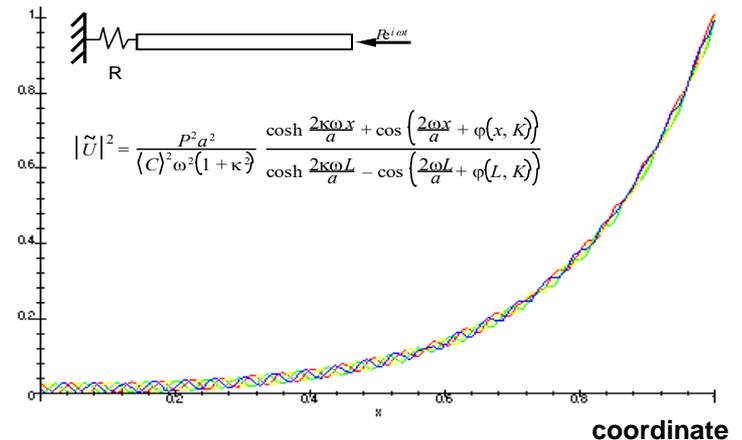
high frequency vibrations of thin elastic plates



$$\frac{h^2}{\omega^2} \Delta \Delta w + \frac{\rho}{12(1 - \nu^2)E} w = 0$$

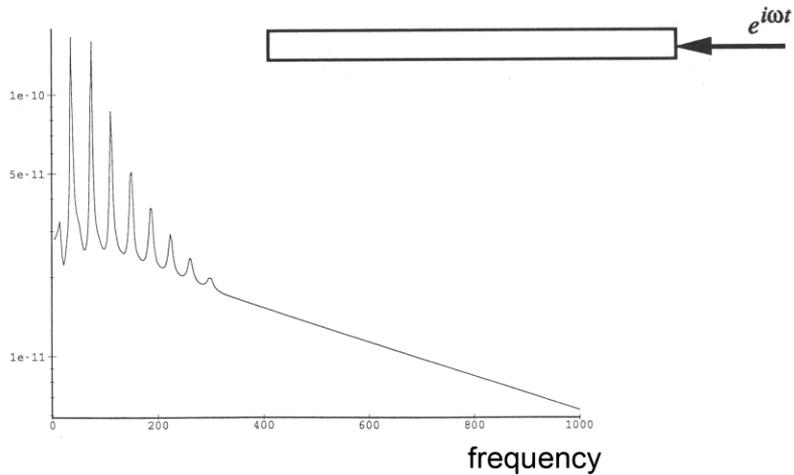
high frequency dynamics of structures

$$0 < x < L; \quad \frac{a^2}{\omega^2} \frac{d^2 \tilde{U}}{dx^2} + [1 - i\kappa(\omega)]^2 \tilde{U} = 0$$

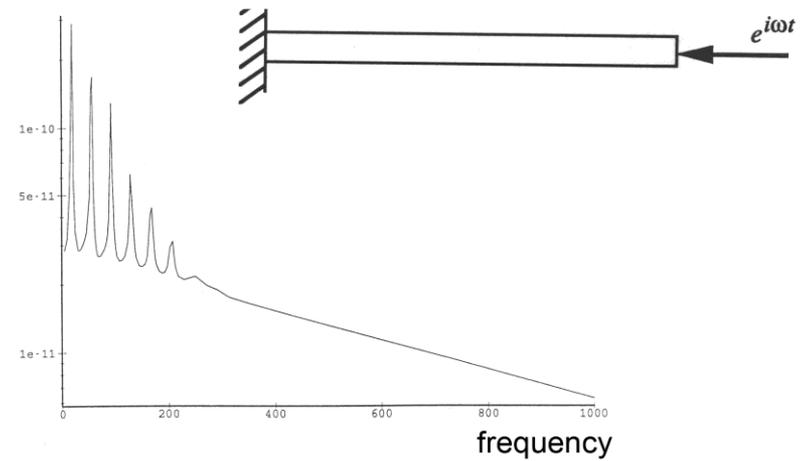


1-D structure, transfer function vs. frequency

square of the transfer function

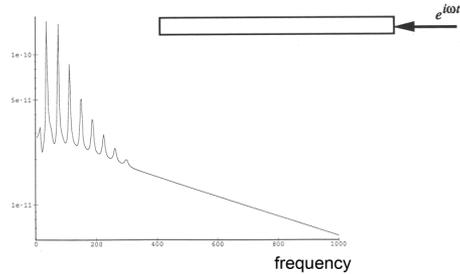


square of the transfer function

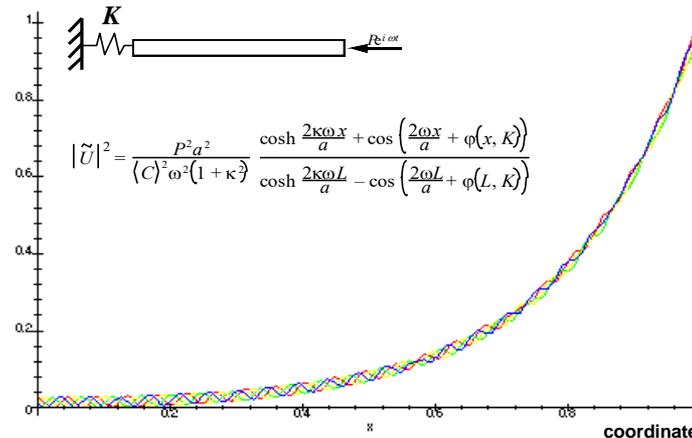
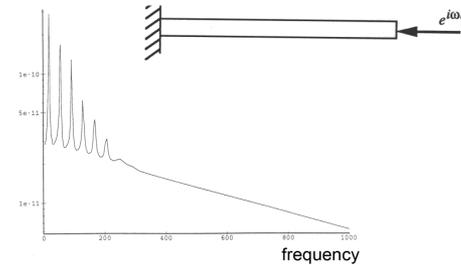


1-D structure, transfer function versus frequency and coordinate

square of the transfer function



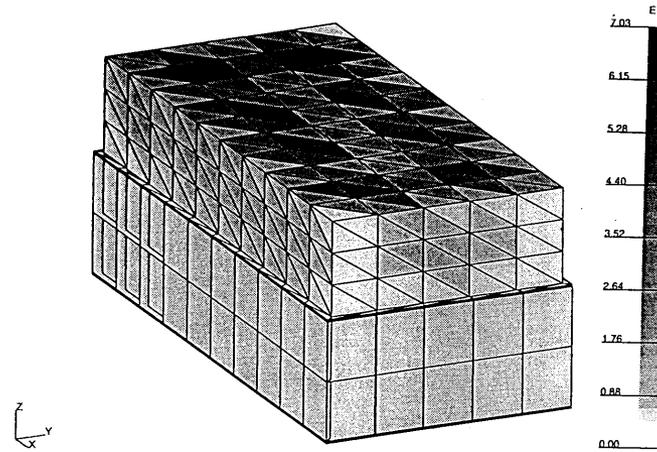
square of the transfer function



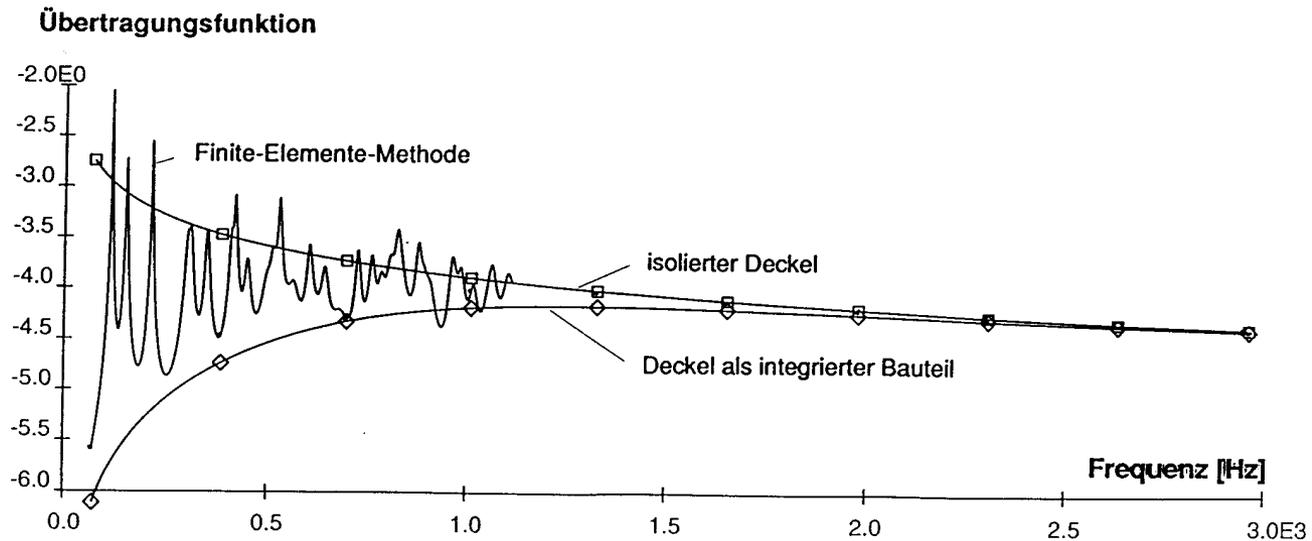
in contrast to low frequency vibration,

at high frequencies any structure behaves like
a heavily damped infinite solid

широкополосная вибрация крышки головки блока цилиндров (AVL List)



пространственное распределение поверхностной скорости при "rain-on-the-roof excitation"



передаточная функция усредненная по поверхности

неустойчивость электродинамического вибростенда

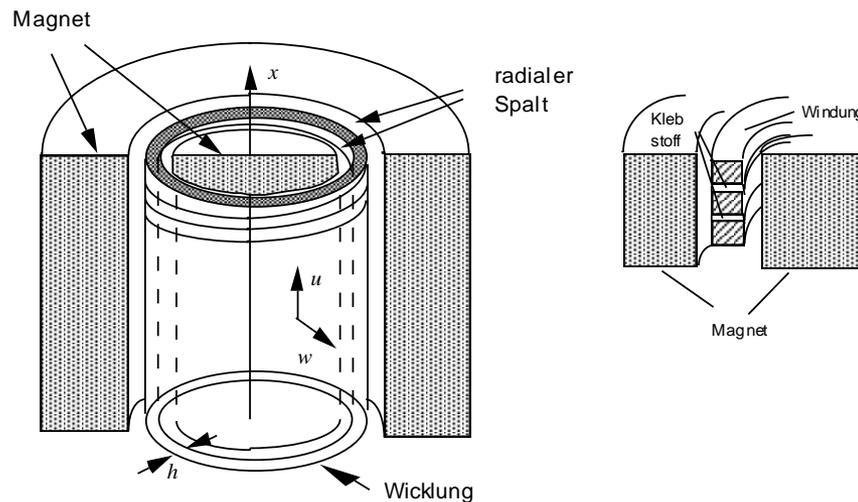
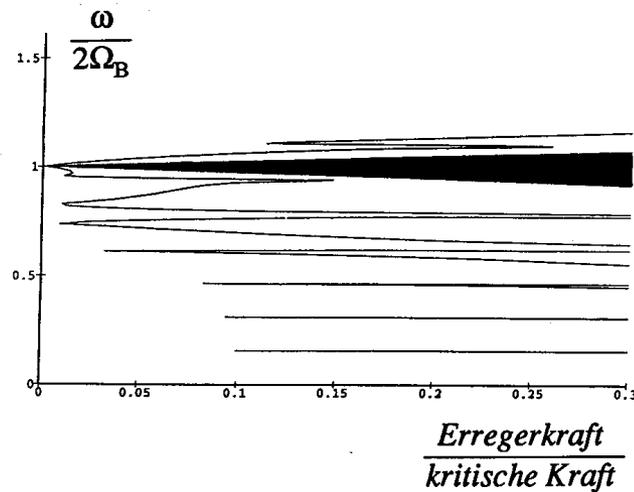
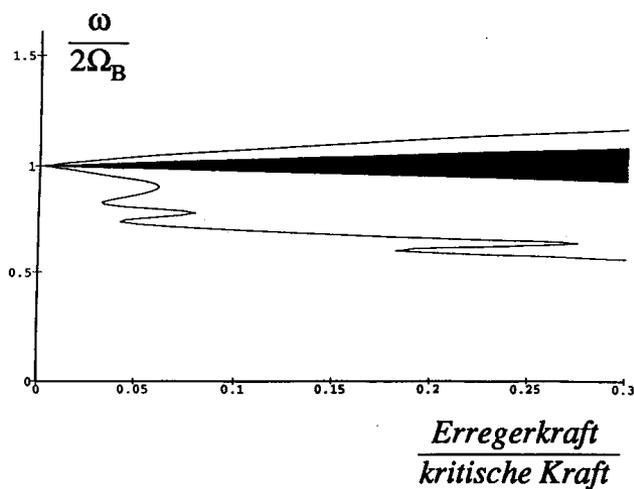


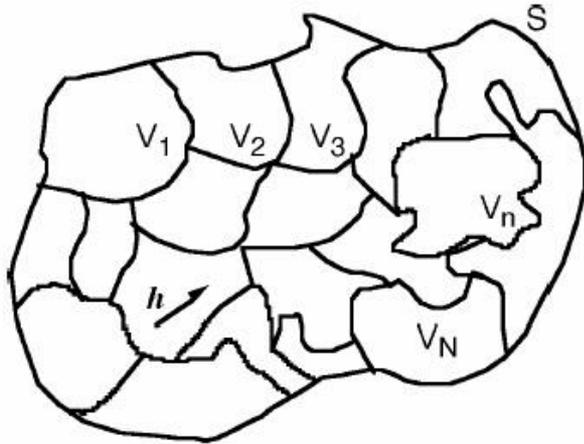
схема электродинамического вибростенда



области неустойчивости катушки вибростенда

Термодинамический подход к высокочастотной динамике

дискретный подход = Statistical Energy Analysis



Основные допущения:

1. постоянная массовая плотность в пределах подсистемы
2. динамически слабосвязанные подсистемы
3. подсистемы со статистически недостоверными параметрами
4. случайное поле нагрузок – изотропный пространственный белый шум

Основное уравнение = уравнение баланса энергий

$$\sum_n^{input} = \omega \eta_{nn} \Sigma_n + \sum_{j \neq n} \omega \eta_{nj} v_j(\omega) \left(\frac{\Sigma_n}{v_n(\omega)} - \frac{\Sigma_j}{v_j(\omega)} \right)$$

Σ_n - усредненная спектральная плотность энергии n -й подсистемы

v_j - плотность собственных частот

η_{nn}, η_{nj} - коэффициенты потерь и передачи подсистем n и j

термодинамика

(сопоставление)

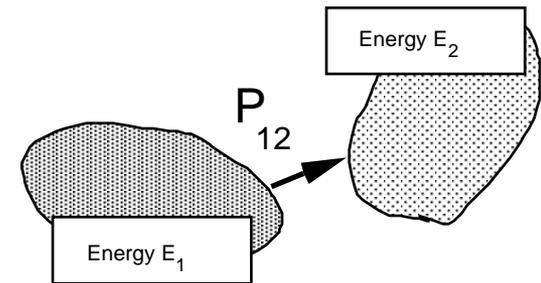
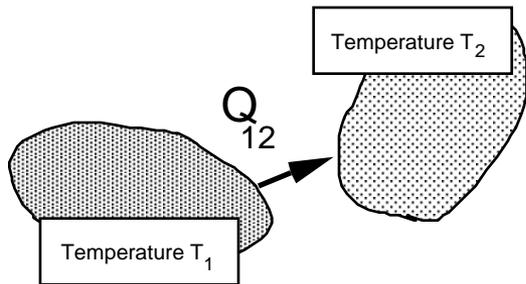
ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ динамика

температура = тепловая вибрация

высокочастотная вибрация

теплопередача

Statistical Energy Analysis (SEA)



поток тепловой энергии

поток вибрационной энергии

$$Q_{12} = -k(T_1 - T_2)$$

$$Q_{12} = -k(E_1 - E_2)$$

поглощение вибрационной энергии

$$B_1 = -\eta_1 E_1, \quad B_2 = -\eta_2 E_2$$

теория вибропроводности

теплопроводность

(сравнение)

вибропроводность

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = b$$

первый закон термодинамики

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = b$$

\mathbf{q} - поток тепловой энергии
 b - приток тепловой энергии

\mathbf{q} - поток вибрационной энергии
 b - приток вибрационной энергии

закон Фурье

определяющее уравнение

SEA

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

$$\mathbf{q} = -K \nabla S$$

$$b = -\alpha S$$

граничная задача

в объеме V

$$K \Delta S - \alpha S = 0$$

S - вибротемпература

(по аналогии с температурой)

на поверхности B

$$N \cdot (K \nabla S) = F$$

K - вибропроводность

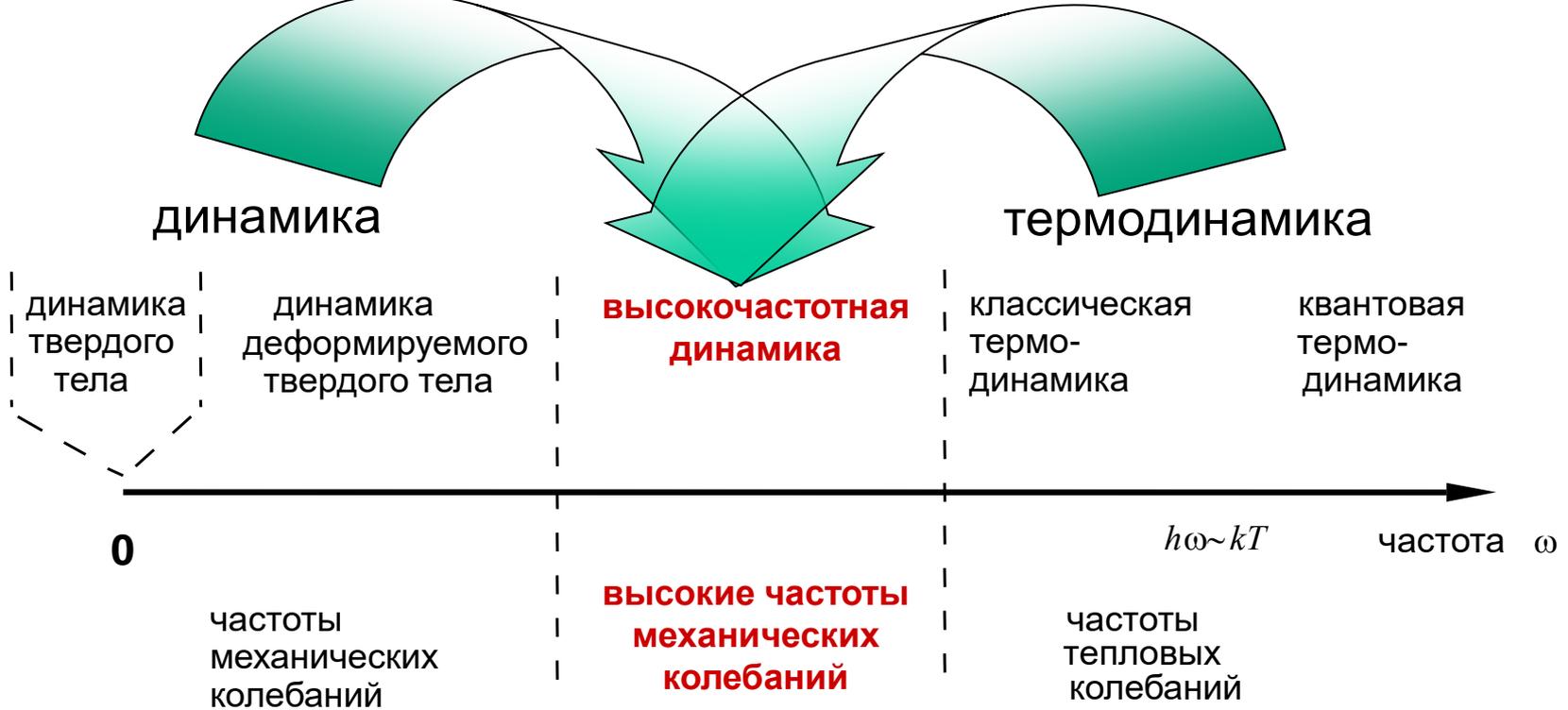
(по аналогии с теплопроводностью)

$-\alpha S$ - сток вибрационной энергии

(по аналогии со стоком тепла)

F - приток вибрационной энергии

(по аналогии с притоком тепла)



параметры граничной задачи

$$S = E\{U \cdot U^*\} = E\{U_x U_x^* + U_y U_y^* + U_z U_z^*\} \quad - \text{ вибротемпература}$$

$$K = \langle \rho \rangle^3 a^2 / 2\omega k \quad \alpha = 2\omega k a \langle \rho \rangle^2 \quad F = \omega^2 [S_{NN} + S_{N1} + S_{N2}]$$

где

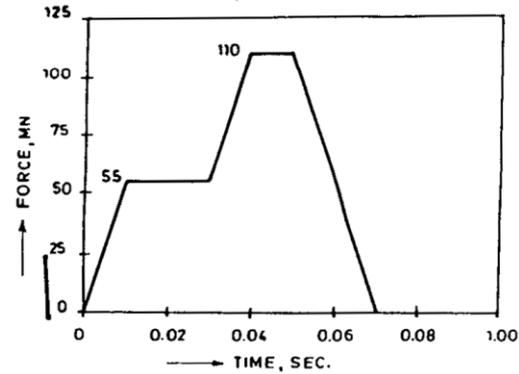
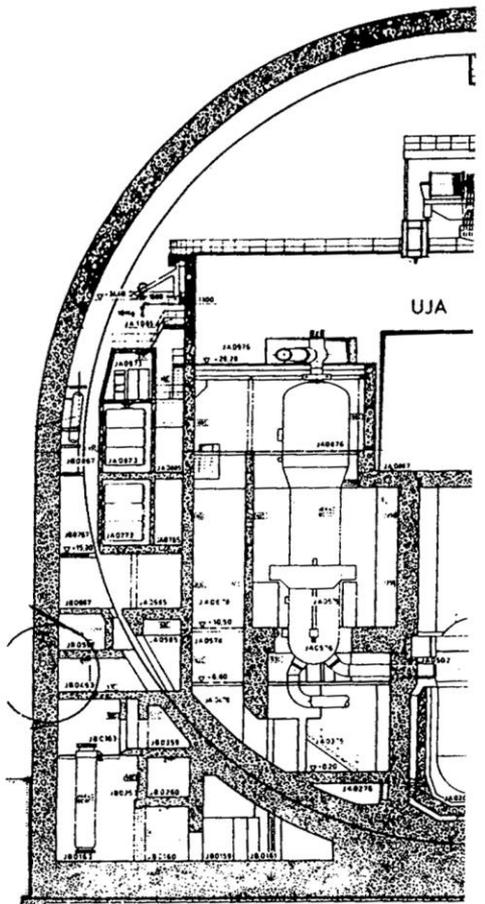
$\langle \rho \rangle$ - средняя плотность конструкции

a - скорость звука

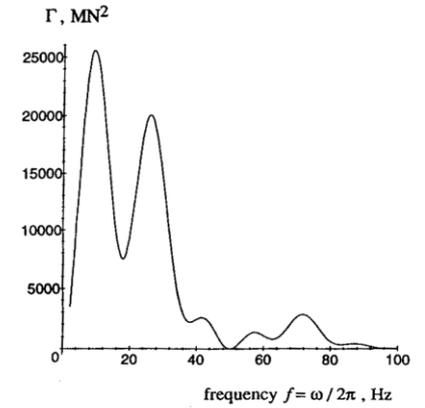
k - параметр поглощения энергии

S_{NN}, S_{N1}, S_{N2} - спектральная плотность напряжений $\tau_{NN}, \tau_{N1}, \tau_{N2}$ на границе

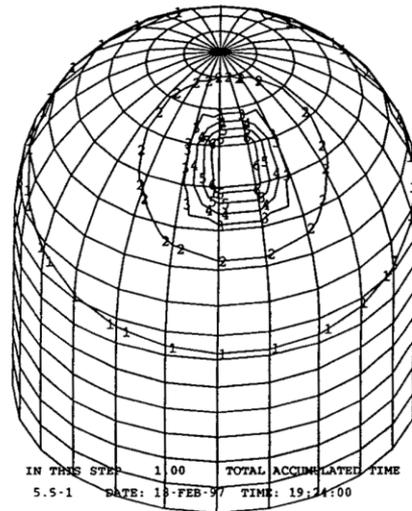
вибрации в АЭС вызванные падением самолета (Siemens KWU Group)



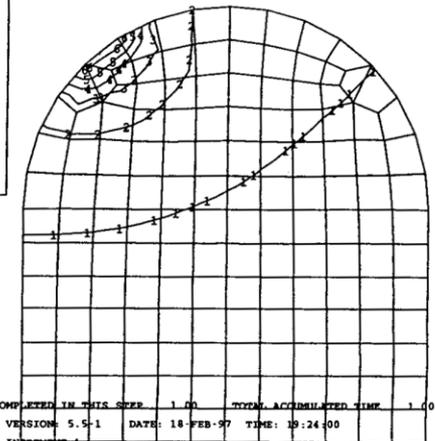
Нагрузка соответствующая падению Фантома (по МАГАТЭ)



Поток вибрационной энергии



TEMP	VALUE
1	+1.23E+02
2	+2.47E+02
3	+3.71E+02
4	+4.95E+02
5	+6.19E+02
6	+7.43E+02



IN THIS STEP 1 00 TOTAL ACCUMULATED TIME
5.5-1 DATE: 18-FEB-97 TIME: 19:24:00

TIME COMPLETED IN THIS STEP 1 00 TOTAL ACCUMULATED TIME 1 00
ANSAQS VERSION: 5.5-1 DATE: 18-FEB-97 TIME: 19:24:00
STEP 1 INCREMENT 1

Вибротемпература в АЭС

ТИПЫ ДИНАМИКИ:

динамика
сплошной среды

термодинамика

энергия



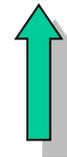
механические вибрации

тепловые вибрации

уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова в переменных нормальной формы $v_1 = u, v_2 = u'$

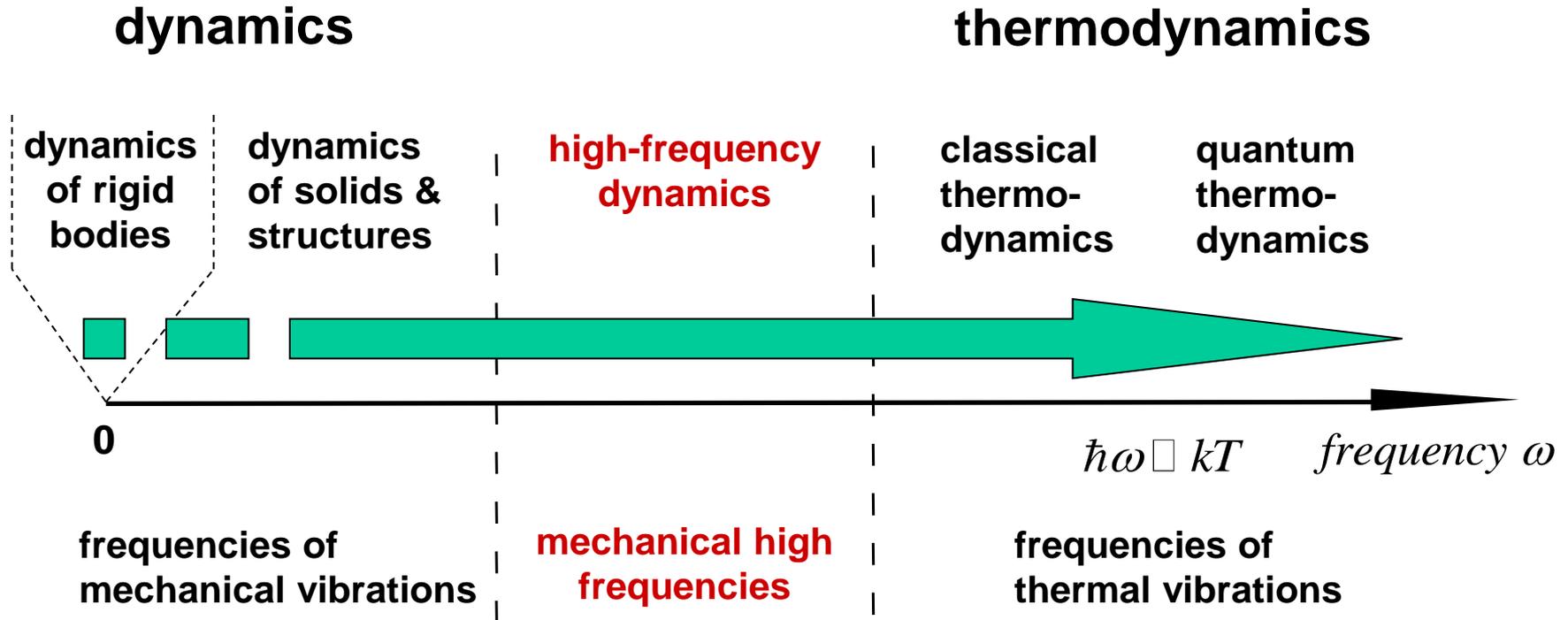
$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial v_n} [\chi_n p] + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2}{\partial v_n \partial v_m} [\gamma_{nm} p]$$

решение = поля $\langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_1 v_3 \rangle, \langle v_2 v_3 \rangle, \langle v_1^2 \rangle, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_2^2 \rangle$

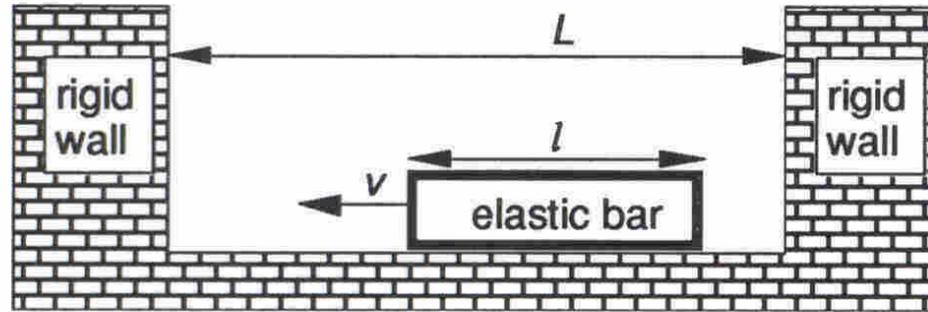


механической & термодинамической
природы

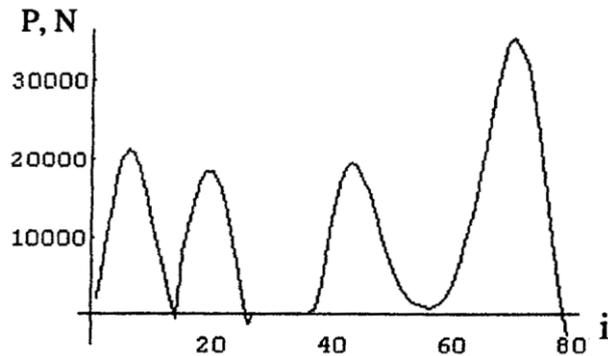
The energy trend in the nature



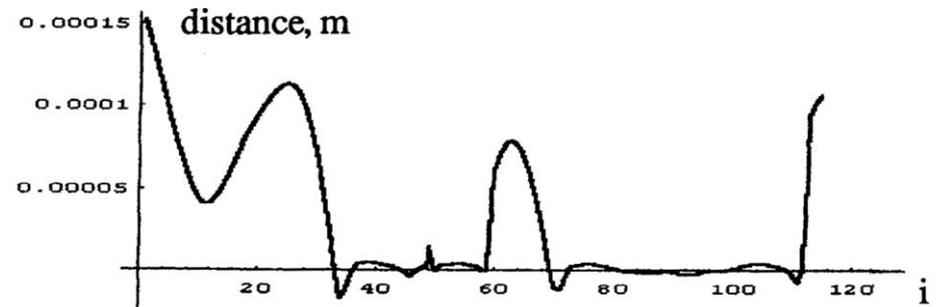
transformation of mechanical energy in thermal energy



elastic bar between two rigid stops



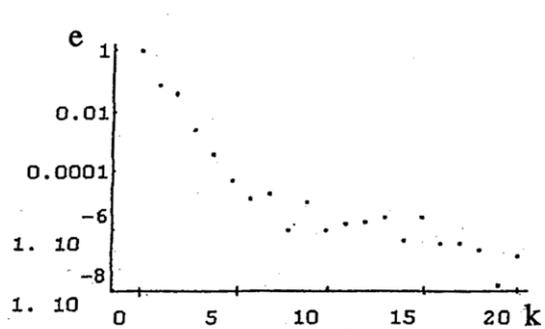
contact force during the collision
the collision



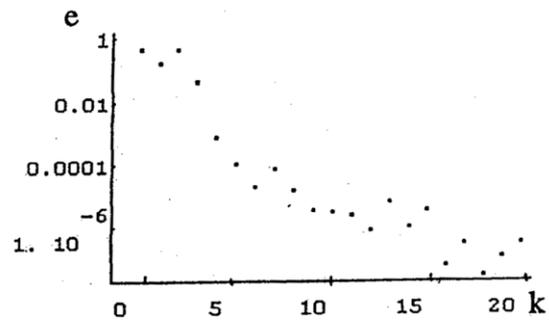
distance to stop during

(an example)

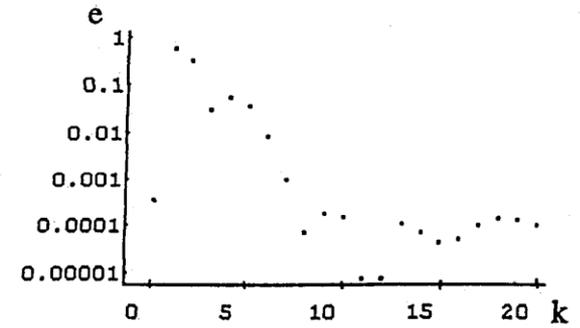
distribution of energy after series of collisions



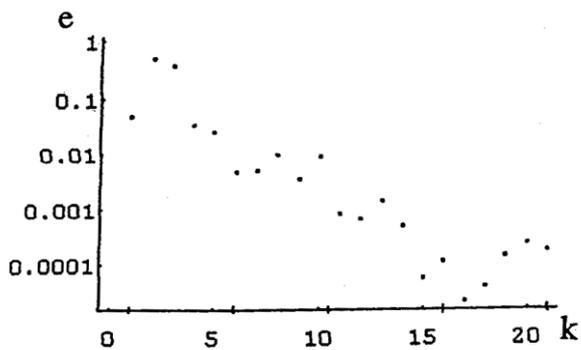
energy of DOF after 5 impacts
after 36 impacts



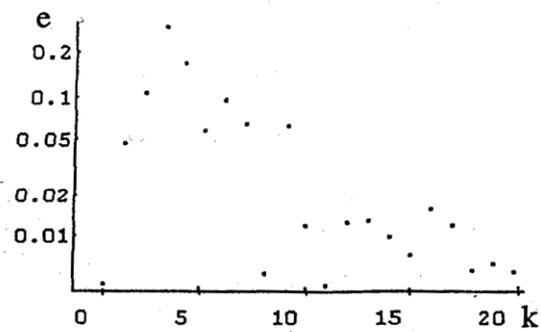
energy of DOF after 20 impacts



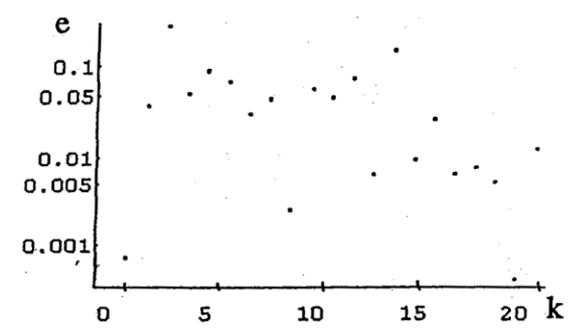
energy of DOF



energy of DOF after 67 impacts
impacts



energy of DOF after 88 impacts



energy of DOF after 100

РЕЗУЛЬТАТ

1. С помощью высокочастотной динамики заполнен промежуток между динамикой и термодинамикой.



2. Высокочастотные колебания обладают как механическими, так и термодинамическими свойствами.
3. Подсистемы инженерных объектов (чувствительные системы, приборы точной механики, системы безопасности и т.д.) – главные объекты высокочастотной динамики. Они могут быть повреждены, поскольку поглощают высокочастотную вибрацию на своих резонансных частотах.